ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

PREMIÈRE PARTIE

LIVRE III

TOPOLOGIE GÉNÉRALE

TROISIÈME ÉDITION REVUE ET AUGMENTÉE

HERMANN

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ В ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ

СЛОВАРЬ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
С. Н. КРАЧКОВСКОГО

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Д. А. РАЙКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1975

517 3/6
Б 91
513.83

Общая топология, вып. 3, Н. Бурбаки, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1975.

Группа французских математиков, объединенная под псевдонимом «Бурбаки», поставила перед собой цель — написать полный трактат современной математической науки.

Настоящим третьим выпуском завершается перевод на русский язык «Общей топологии».

Книга рассчитана на математиков — научных работников, аспирантов и студентов старших курсов университетов и пединститутов.

Библ. 16 назв.

Н. Бурбаки

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. Словарь

М., 1975 г., 408 стр. с илл.

Редактор *М. М. Горячая*

Техн. редактор *А. П. Колесникова*. Корректор *Т. С. Вайсберг*

Сдано в набор 4/XII 1974 г. Подписано к печати 12/V 1975 г. Бумага 60×90¹/₁₆. Физ. печ. л. 25,5+2 вкл. Условн. печ. л. 26,125. Уч.-изд. л. 24,67. Тираж 15000 экз. Цена книги 1 р. 99 к. Заказ № 0603

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Московская типография № 7 «Искра революции» Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
Москва К-1, Трехпрудный пер., 9

Б $\frac{20203-083}{053(02)-75}$ 35-75

© Перевод на русский язык, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1975.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От издательства 9

Глава IX. Использование вещественных чисел в общей топологии 11

§ 1. Порождение равномерной структуры семейством отклонений. Равномеризуемые пространства 11

1. Отклонения 11
2. Определение равномерной структуры посредством семейства отклонений 12
3. Свойства равномерных структур, определяемых семействами отклонений 15
4. Построение семейства отклонений, определяющего равномерную структуру 17
5. Равномеризуемые пространства 19
6. Полунепрерывные функции на равномеризуемом пространстве 21

Упражнения 23

§ 2. Метрические пространства; метризуемые пространства 31

1. Расстояния и метрические пространства 31
2. Структура метрического пространства 33
3. Колебание функции 36
4. Метризуемые равномерные пространства 37
5. Метризуемые топологические пространства 38
6. Роль счетных последовательностей 39
7. Полунепрерывные функции на метризуемом пространстве 41
8. Метризуемые пространства счетного типа 42
9. Компактные метрические пространства; компактные метризуемые пространства 44
10. Факторпространства метризуемых пространств 47

Упражнения 49

§ 3. Метризуемые группы; нормированные тела; нормированные пространства и алгебры 59

1. Метризуемые топологические группы 59
2. Нормированные тела 65
3. Нормированные пространства над нормированным телом . . 70
4. Факторпространства и произведения нормированных пространств 73

5. Непрерывные полилинейные функции 75
6. Абсолютно суммируемые семейства в нормированном пространстве 76
7. Нормированные алгебры над нормированным телом 77
Упражнения 82
§ 4. Нормальные пространства 86
1. Определение нормальных пространств 86
2. Продолжение непрерывной числовой функции 90
3. Локально конечные открытые покрытия замкнутого множества в нормальном пространстве 92
4. Паракомпактные пространства 96
5. Паракомпактность метризуемых пространств 99
Упражнения 102
§ 5. Бэровские пространства 113
1. Разреженные множества 113
2. Тощие множества 115
3. Бэровские пространства 116
4. Полунепрерывные функции на бэровском пространстве . . . 118
Упражнения 119
§ 6. Польские пространства; суслинские пространства; борелевские множества 128
1. Польские пространства 128
2. Суслинские пространства 132
3. Борелевские множества 134
4. Раздробленные и лузинские пространства 136
5. Решето 138
6. Отделение суслинских множеств 140
7. Лузинские пространства и борелевские множества 142
8. Борелевские сечения 144
9. Емкостность суслинских множеств 146
Упражнения 149
Приложение к главе IX. Бесконечные произведения в нормированных алгебрах 160
1. Перемножаемые последовательности в нормированной алгебре 160
2. Критерии перемножаемости 161
3. Бесконечные произведения 165
Упражнения 167
Исторический очерк к главе IX 170
Библиография 172
Глава X. Функциональные пространства 173
Предисловие ко второму изданию 173
§ 1. Равномерная структура $\mathfrak{S}$-сходимости 173
1. Структура равномерной сходимости 173
2. $\mathfrak{S}$-сходимость 174

3. Примеры $\mathfrak{S}$-сходимости 177
4. Свойства пространств $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ 179
5. Полные множества в $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ 180
6. $\mathfrak{S}$-сходимость в пространствах непрерывных отображений 181
Упражнения 186
§ 2. Равностепенно непрерывные множества 190
1. Определение и общие признаки 190
2. Специальные признаки равностепенной непрерывности . . . 195
3. Замыкание равностепенно непрерывного множества 197
4. Простая сходимость и компактная сходимость в равностепенно непрерывных множествах 198
5. Компактные множества непрерывных отображений 199
Упражнения 202
§ 3. Специальные функциональные пространства 208
1. Пространства отображений в метрическое пространство . . 208
2. Пространства отображений в нормированное пространство . 211
3. Свойства счетности пространств непрерывных функций . . 215
4. Топология компактной сходимости 217
5. Топологии в группах гомеоморфизмов 223
Упражнения 227
§ 4. Аппроксимация непрерывных числовых функций 238
1. Аппроксимация непрерывных функций функциями из некоторой решетки 238
2. Аппроксимация непрерывных функций полиномами 241
3. Приложение: аппроксимация непрерывных числовых функций, определенных на произведении компактных пространств 244
4. Аппроксимация непрерывных отображений компактного пространства в нормированное пространство 245
Упражнения 248
Исторический очерк к главе X 259
Библиография 261

Сводка результатов Книги III 262
Введение 262
§ 1. Топологические структуры; открытые множества, окрестности, замкнутые множества 263
§ 2. Фильтры и пределы 269
§ 3. Равномерные пространства; метрические пространства 278
§ 4. Сравнение топологий и равномерных структур 285
§ 5. Аксиомы отделимости 288
§ 6. Непрерывные функции равномерно непрерывные функции, полунепрерывные функции 292
§ 7. Подпространства; произведения пространств; факторпространства 300

§ 8. Компактные пространства и локально компактные пространства 310
§ 9. Связность 317
§ 10. Топологическая алгебра 320
§ 11. Бесконечные суммы и произведения 334
§ 12. Аддитивные группы в $\mathbf{R}^n$ 340
§ 13. Функциональные пространства 345

Словарь 357

Указатель обозначений 392
Указатель терминов 394
Диаграмма основных типов топологических пространств . . . . вклейка
Определения и аксиомы главы IX . . . . . вклейка

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Настоящим выпуском, содержащим IX—X главы и сводку результатов «Общей топологии» Н. Бурбаки, заканчивается ее перевод на русский язык. Одиннадцатая глава, обещанная автором в последнем французском издании глав I—II, не появилась из-за его безвременной кончины. Главы I—VIII «Общей топологии» выходили на русском языке дважды — в переводах со второго и третьего французских изданий. Настоящий перевод глав IX—X и сводки результатов выполнен с последних (вторых) французских изданий.

В последнем (французском) издании главы IX были даны ссылки только на второе французское издание глав I—VIII, а в главе X — лишь на третье. Для удобства читателя, имеющего только первое или второе русское издание предыдущих глав, в предлагаемом переводе IX—X глав и «Сводки результатов», там, где это оказалось возможным, даны ссылки на оба издания. Отсутствие ссылки на номер издания означает, что она одна и та же для обоих изданий.

ГЛАВА IX

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ В ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ

§ 1. Порождение равномерной структуры семейством отклонений. Равномеризуемые пространства

1. *Отклонения*

Определение 1. *Отклонением на данном множестве E называют всякое отображение f произведения $E \times E$ в интервал $[0, +\infty]$ расширенной прямой $\overline{\mathbf{R}}$, удовлетворяющее следующим условиям:*

($\mathrm{EC_I}$) $f(x, x) = 0$ *при любом* $x \in E$.

($\mathrm{EC_{II}}$) $f(x, y) = f(y, x)$ *при любых* $x \in E$, $y \in E$ (симметрия).

($\mathrm{EC_{III}}$) $f(x, y) \leqslant f(x, z) + f(z, y)$ *при любых* $x \in E$, $y \in E$, $z \in E$ (неравенство треугольника).

Примеры. 1) Евклидово расстояние на числовом пространстве $\mathbf{R}^n$ (гл. VI, § 2, n° 1) есть отклонение.

2) Пусть E — произвольное множество; функция f, определенная на $E \times E$ условиями $f(x, x) = 0$ для каждого $x \in E$ и $f(x, y) = +\infty$ при $x \neq y$, есть отклонение на E.

3) Пусть g — конечная числовая функция, определенная на произвольном множестве E; функция f, определенная на $E \times E$ равенством $f(x, y) = |g(x) - g(y)|$, есть отклонение на E.

°4) Пусть E — множество всех непрерывных отображений интервала $[0, 1] \subset \mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$. Положим $f(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt$ для всех пар элементов x, y из E, получим отклонение f на E.°

Замечания. 1) Приведенный выше пример 2 показывает, что для некоторых пар элементов из E отклонение может принимать значение $+\infty$.

2) Как показывает вышеприведенный пример 3, равенство $f(x, y) = 0$ для отклонения f на E может, вообще говоря, выполняться и при $x \neq y$.

Из неравенства треугольника следует, что если $f(x, z)$ и $f(y, z)$ конечны, то и $f(x, y)$ конечно; кроме того, в этом случае имеем $f(x, z) \leqslant f(y, z) + f(x, y)$ и $f(y, z) \leqslant f(x, z) + f(x, y)$, откуда

$$|f(x, z) - f(y, z)| \leqslant f(x, y). \tag{1}$$

Если f — отклонение на E, то λf тоже отклонение, каково бы ни было конечное число $\lambda > 0$. Если $(f_\iota)_{\iota \in I}$ — какое-либо семейство отклонений на E, то сумма $\sum_{\iota \in I} f_\iota(x, y)$ определена для всех пар $(x, y) \in E \times E$; пусть $f(x, y)$ — ее значение; тогда f — отклонение на E. Точно так же *верхняя огибающая* g семейства (f_ι) (гл. IV, § 5, n° 5) является отклонением на E, ибо из отношений $f_\iota(x, y) \leqslant f_\iota(x, z) + f_\iota(z, y)$ следует, что

$$\sup_{\iota \in I} f_\iota(x, y) \leqslant \sup_{\iota \in I} (f_\iota(x, z) + f_\iota(z, y)) \leqslant \sup_{\iota \in I} f_\iota(x, z) + \sup_{\iota \in I} f_\iota(z, y)$$

(гл. IV, § 5, формула (17)).

2. *Определение равномерной структуры посредством семейства отклонений*

Пусть U_a для каждого числа $a > 0$ есть множество всех пар (x, y) точек из $\mathbf{R}^n$, евклидовы расстояния между которыми $\leqslant a$; как мы видели (гл. VI, § 2, n° 3), множества U_a, где a пробегает все числа > 0, образуют фундаментальную систему окружений равномерной структуры пространства $\mathbf{R}^n$.

Более общим образом пусть f — отклонение на множестве E; для каждого $a > 0$ положим $U_a = \overleftarrow{f}([0, a])$; покажем, что когда a пробегает все числа > 0, множества U_a образуют *фундаментальную систему окружений* некоторой равномерной структуры в E. В самом деле, аксиома $(\mathrm{U}'_{\mathrm{I}})$ выполнена в силу $(\mathrm{EC}_{\mathrm{I}})$; если $a \leqslant b$, то $U_a \subset U_b$, так что множества U_a образуют базис фильтра; в силу $(\mathrm{EC}_{\mathrm{II}})$ имеем $\overleftarrow{U}_a = U_a$ и, следовательно, выполнена аксиома $(\mathrm{U}'_{\mathrm{II}})$; наконец, в силу $(\mathrm{EC}_{\mathrm{III}})$ имеем $\overleftarrow{U}_a \subset U_{2a}$, так что выполнена аксиома $(\mathrm{U}'_{\mathrm{III}})$. Таким образом, можно сформулировать следующее определение:

Определение 2. *Пусть на множестве E задано отклонение f; равномерной структурой, определяемой f, называется равномерная структура в E, имеющая в качестве фундаментальной системы окружений семейство множеств $\overline{f}^{-1}([0, a])$, где a пробегает все числа >0.*

Два отклонения на E называются эквивалентными, если они определяют одну и ту же равномерную структуру.

Замечания. 1) Для любой последовательности (a_n) чисел >0, стремящейся к 0, множества U_{a_n} образуют фундаментальную систему окружений равномерной структуры, определяемой отклонением f.

2) Определение равномерной структуры посредством отклонения f сводится к тому, что за фундаментальную систему окружений этой структуры принимается *прообраз* относительно f фильтра окрестностей нуля в подпространстве $[0, +\infty]$ пространства $\overline{\mathbf{R}}$. Отметим, что этот способ вполне аналогичен применяемому нами для определения равномерных структур в топологической группе (гл. III, § 3, n° 1).

Пусть f и g — отклонения на E; по определению 2, для того чтобы равномерная структура, определяемая отклонением f, *мажорировалась* равномерной структурой, определяемой отклонением g, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $a > 0$ существовало $b > 0$ такое, что $g(x, y) \leqslant b$ влечет $f(x, y) \leqslant a$. Для того чтобы отклонения f и g были *эквивалентны*, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $a > 0$ существовало $b > 0$ такое, что $g(x, y) \leqslant b$ влечет $f(x, y) \leqslant a$, а $f(x, y) \leqslant b$ влечет $g(x, y) \leqslant a$.

В частности, если существует постоянная $k > 0$ такая, что $f \leqslant kg$, то равномерная структура, определяемая отклонением f, мажорируется равномерной структурой, определяемой отклонением g.

Пусть φ — отображение интервала $[0, +\infty]$ в себя, удовлетворяющее следующим условиям: 1° $\varphi(0) = 0$ и φ непрерывно в точке 0; 2° φ возрастает на интервале $[0, +\infty]$ и строго возрастает на некоторой окрестности точки 0; 3° $\varphi(u + v) \leqslant \varphi(u) + \varphi(v)$ для всех $u \geqslant 0$ и $v \geqslant 0$. Согласно определениям 1 и 2 для любого отклонения f на каком-либо множестве E сложная функция $g = \varphi \circ f$ является отклонением, *эквивалентным* f.

Читатель легко проверит, что за φ можно принять, например, любую из функций $\sqrt{u}$, $\log(1 + u)$, $\dfrac{u}{1 + u}$, $\inf(u, 1)$.

Два последних примера показывают, что всегда существуют ограниченные отклонения, эквивалентные заданному (конечному или нет).

Определение 3. *Пусть $(f_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство отклонений на множестве E; равномерной структурой в E, определяемой этим семейством, называется верхняя грань множества равномерных структур, определяемых в E каждым из отклонений f_ι.*

Два семейства отклонений на E называются эквивалентными, если они определяют одну и ту же равномерную структуру.

Согласно определению верхней грани множества равномерных структур (гл. II, 2-е изд., § 1, n° 2; 3-е изд., § 2, n° 5) фильтр окружений равномерной структуры $\mathcal{U}$, определяемой в E семейством отклонений $(f_\iota)_{\iota\in I}$, есть фильтр, *порожденный* (гл. I, 2-е изд., § 5, n° 3; 3-е изд., § 6, n° 2) семейством множеств $f_\iota^{-1}([0, a])$, где ι пробегает I, а a — множество всех чисел >0. Другими словами, фундаментальную систему окружений для $\mathcal{U}$ можно получить следующим образом: берем произвольное конечное число индексов $\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_n$ и для каждого ι_k — любое число $a_k > 0$; образуем множество всех пар $(x, y) \in E \times E$ таких, что $f_{\iota_k}(x, y) \leqslant a_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$; эти множества (при всевозможных n, ι_k и a_k) образуют фундаментальную систему окружений равномерной структуры $\mathcal{U}$. Впрочем, можно ограничиться случаем, когда все a_k равны *одному и тому же числу* $a > 0$, ибо окружение, состоящее из тех (x, y), для которых $\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n} (f_{\iota_k}(x, y)) \leqslant \inf\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k$, очевидно, содержится в предыдущем.

Пусть g_H для каждого конечного подмножества H множества I означает верхнюю огибающую семейства $(f_\iota)_{\iota\in H}$; мы видим, что когда H пробегает всевозможные конечные подмножества множества I, а a — всевозможные числа > 0, то множества $g_H^{-1}([0, a])$ образуют *фундаментальную систему окружений* равномерной структуры $\mathcal{U}$. Но g_H — *отклонения* на E (n° 1), причем верхняя огибающая конечного числа функций из семейства (g_H) по определению снова принадлежит этому семейству; это свойство выражают, говоря, что семейство отклонений (g_H) *насыщенно*. Таким образом, семейство отклонений (g_H) *эквивалентно* семейству (f_ι); будем говорить, что оно получено *насыщением* семейства (f_ι); из предыдущего видно, что всегда можно ограничиться рассмотрением равномерных структур, определяемых *насыщенными* семействами отклонений.

В том частном случае, когда I — *конечное* множество, это рассуждение показывает, что равномерная структура, определяемая семейством отклонений $(f_\iota)_{\iota\in I}$, определяется также *одним* отклонением $g = \sup_{\iota\in I} f_\iota$.

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ — равномерные структуры в E, определяемые соответственно *насыщенными* семействами отклонений $(f_\iota)_{\iota\in I}$, $(g_\varkappa)_{\varkappa\in K}$; для того чтобы $\mathcal{U}'$ *мажорировала* $\mathcal{U}$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого индекса $\iota \in I$ и каждого числа $a > 0$ существовали индекс $\varkappa \in K$ и число $b > 0$ такие, что $g_\varkappa(x, y) \leqslant b$ влечет $f_\iota(x, y) \leqslant a$.

Пример равномерной структуры, определяемой семейством отклонений. Пусть $(f_\iota)_{\iota\in I}$ — какое-либо семейство конечных *числовых функций*, определенных на множестве E, и $\mathcal{U}$ — слабейшая из равномерных структур в E, при которых все f_ι равномерно непрерывны (гл. II, 2-е изд., § 5, n° 1; 3-е изд., § 2, n° 3); из определения окружений структуры $\mathcal{U}$ (гл. II, 2-е изд., § 5, n° 1; 3-е изд., § 2, n° 3) следует, что $\mathcal{U}$ совпадает с равномерной структурой, определяемой в E отклонениями $g_\iota(x, y) = |f_\iota(x) - f_\iota(y)|$.

3. *Свойства равномерных структур, определяемых семействами отклонений*

Пусть $\mathcal{U}$ — равномерная структура, определяемая в множестве E семейством конечных отклонений (f_ι); если наделить $E \times E$ произведением равномерной структуры $\mathcal{U}$ на себя, то каждая из числовых функций f_ι будет *равномерно непрерывна* на $E \times E$; в самом деле, в силу (1)

$$|f_\iota(x, y) - f_\iota(x', y')| \leqslant f_\iota(x, x') + f_\iota(y, y'),$$

и, следовательно, отношения $f_\iota(x, x') \leqslant \varepsilon/2$, $f_\iota(y, y') \leqslant \varepsilon/2$ влекут

$$|f_\iota(x, y) - f_\iota(x', y')| \leqslant \varepsilon.$$

Для того чтобы $\mathcal{U}$ была *отделимой*, необходимо и достаточно, согласно определению ее окружений, чтобы для каждой пары *различных* точек x, y из E существовал индекс ι такой, что $f_\iota(x, y) \neq 0$.

В частности, если $\mathcal{U}$ определена *одним* отклонением f, то для отделимости $\mathcal{U}$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x, y) = 0$ влекло $x = y$ (см. § 2).

Если $\mathcal{U}$ неотделима, пересечением всех ее окружений служит подмножество произведения $E \times E$, образованное всеми такими парами (x, y), что $f_\iota(x, y) = 0$ для всех ι; это подмножество есть график некоторого отношения эквивалентности R на E, и отделимая равномерная структура, ассоциированная с $\mathcal{U}$, определена в E/R (см. гл. II, 2-е изд., § 1, n° 4; 3-е изд., § 3, n° 8). Легко видеть тогда, что функции f_ι согласуются (по x и y) с отношением R (Теор. множ., Сводка результ., § 5, n° 7) и что функции $\bar{f}_\iota$, получаемые из f_ι факторизацией (по x и y), являются отклонениями на E/R, определяющими отделимую равномерную структуру, ассоциированную с $\mathcal{U}$ (см. § 2, n° 1).

Пусть A — непустое подмножество множества E; очевидно, сужение на $A \times A$ отклонения, заданного на E, есть отклонение на A; ясно, что $\mathcal{U}$ *индуцирует* в A равномерную структуру, определяемую сужениями на $A \times A$ отклонений f_ι.

Рассмотрим теперь *пополнение* отделимого равномерного пространства.

Предложение 1. *Пусть E — отделимое равномерное пространство, равномерная структура которого $\mathcal{U}$ определена семейством конечных отклонений (f_ι), и $\hat{E}$ — пополнение пространства E. Функции f_ι продолжаются по непрерывности на $\hat{E} \times \hat{E}$; продолженные функции $\bar{f}_\iota$ являются конечными отклонениями на $\hat{E}$, и равномерная структура в $\hat{E}$ совпадает с равномерной структурой, определяемой семейством $(\bar{f}_\iota)$.*

Прежде всего, функции f_ι допускают продолжение по непрерывности на $\hat{E} \times \hat{E}$, ибо они равномерно непрерывны на $E \times E$, и продолженные функции $\bar{f}_\iota$ равномерно непрерывны на $\hat{E} \times \hat{E}$ (гл. II, 2-е изд., § 3, теорема 1; 3-е изд., § 3, теорема 2); кроме того, $\bar{f}_\iota$ являются отклонениями на $\hat{E}$ в силу принципа продолжения неравенств (гл. IV, § 5, теорема 1). Обозначим через $\mathcal{U}_1$ равномерную структуру в $\hat{E}$ как пополнении E, а через $\mathcal{U}_2$ — равномерную структуру, определяемую семейством отклонений $(\bar{f}_\iota)$. $\mathcal{U}_1$ *мажорирует* $\mathcal{U}_2$; в самом деле, при наделении $\hat{E}$ структурой $\mathcal{U}_1$, каждая из функций $\bar{f}_\iota$ равномерно непрерывна на $\hat{E} \times \hat{E}$;

следовательно, для каждого $a > 0$ существует окружение V структуры $\mathscr{U}_1$ такое, что $|\bar{f}_\iota(x, y) - \bar{f}_\iota(x, x)| \leqslant a$ для любой пары $(x, y) \in V$, т. е. (поскольку $\bar{f}_\iota(x, x) = 0$) $V \subset \bar{f}_\iota^{-1}([0, a])$; таким образом, всякое окружение структуры $\mathscr{U}_2$ является вместе с тем окружением структуры $\mathscr{U}_1$. С другой стороны, $\mathscr{U}_1$ и $\mathscr{U}_2$ индуцируют в E *одну и ту же* равномерную структуру $\mathscr{U}$. Поскольку E в $\mathscr{U}_1$ *полно* и отделимо, заключаем (гл. II, 2-е изд., § 3, следствие предложения 9; 3-е изд., § 3, предложение 14), что $\mathscr{U}_1$ и $\mathscr{U}_2$ *совпадают*.

4. *Построение семейства отклонений, определяющего равномерную структуру*

Способ определения равномерной структуры семейством отклонений важен тем, что он позволяет получить *все равномерные структуры*. Точнее говоря:

Теорема 1. *Для каждой заданной в множестве E равномерной структуры $\mathscr{U}$ существует на E такое семейство отклонений, что определяемая им равномерная структура совпадает с $\mathscr{U}$.*

Для каждого окружения V равномерной структуры $\mathscr{U}$ определим по индукции последовательность симметричных окружений (U_n) такую, что $U_1 \subset V$ и $\overset{3}{U}_{n+1} \subset U_n$ при всех $n \geqslant 1$; последовательность (U_n) является фундаментальной системой окружений некоторой равномерной структуры $\mathscr{U}_V$, мажорируемой структурой $\mathscr{U}$; при этом ясно, что $\mathscr{U}$ есть *верхняя грань* множества структур $\mathscr{U}_V$, получаемых так, когда V пробегает фильтр окружений структуры $\mathscr{U}$. Поэтому теорема 1 вытекает из следующего предложения:

Предложение 2. *Если равномерная структура $\mathscr{U}$ в E обладает счетной фундаментальной системой окружений, то на E существует отклонение f такое, что $\mathscr{U}$ совпадает с определяемой им равномерной структурой.*

Пусть (V_n) — счетная фундаментальная система окружений структуры $\mathscr{U}$; определим по индукции последовательность (U_n) симметричных окружений структуры $\mathscr{U}$ такую, что $U_1 \subset V_1$ и

$$\overset{3}{U}_{n+1} \subset U_n \cap V_n \quad \text{для всех} \quad n \geqslant 1.$$

Ясно, что (U_n) тоже является фундаментальной системой окружений для $\mathcal{U}$, причем $U_{n+1}^3 \subset U_n$ для $n \geqslant 1$. Определим следующим образом числовую функцию g на $E \times E$: $g(x, y) = 0$, если $(x, y) \in U_n$ для всех n; $g(x, y) = 2^{-k}$, если $(x, y) \in U_n$, когда $1 \leqslant n \leqslant k$, но $(x, y) \notin U_{k+1}$; $g(x, y) = 1$, если $(x, y) \notin U_1$. Функция g симметрична, положительна и $g(x, x) = 0$ для всех $x \in E$. Положим

$$f(x, y) = \inf \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}),$$

где нижняя грань берется по множеству всевозможных конечных последовательностей $(z_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ (p произвольно) таких, что $z_0 = x$, а $z_p = y$. Покажем, что f есть *отклонение*, удовлетворяющее неравенствам

$$\frac{1}{2} g(x, y) \leqslant f(x, y) \leqslant g(x, y). \tag{2}$$

В самом деле, из определения функции f тотчас вытекает, что она удовлетворяет неравенству треугольника, симметрична и положительна; очевидно, второе из неравенств (2) показывает, что $f(x, x) = 0$ для всех $x \in E$; таким образом, f — отклонение. Для доказательства первого из неравенств (2) покажем индукцией по p, что для каждой конечной последовательности из $p + 1$ точек $(z_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ множества E, в которой $z_0 = x$ и $z_p = y$, имеет место неравенство

$$\sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) \geqslant \frac{1}{2} g(x, y). \tag{3}$$

Для $p = 1$ это очевидно. Пусть $a = \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1})$; если $a \geqslant 1/2$, то неравенство (3) справедливо, поскольку $g(x, y) \leqslant 1$. Предположим поэтому, что $a < 1/2$, и пусть h — наибольший из индексов q, для которых

$$\sum_{i<q} g(z_i, z_{i+1}) \leqslant \frac{a}{2};$$

таким образом, $\sum_{i<h} g(z_i, z_{i+1}) \leqslant \frac{a}{2}$ и $\sum_{i<h+1} g(z_i, z_{i+1}) > \frac{a}{2}$, откуда

$$\sum_{i>h} g(z_i, z_{i+1}) \leqslant \frac{a}{2}.$$

По предположению индукции, $g(x, z_h) \leqslant a$, $g(z_{h+1}, y) \leqslant a$; с другой стороны, очевидно, $g(z_h, z_{h+1}) \leqslant a$. Пусть k — наименьшее целое число > 0, для которого $2^{-k} \leqslant a$; тогда $k \geqslant 2$, $(x, z_h) \in \in U_h$, $(z_h, z_{h+1}) \in U_h$ и $(z_{h+1}, y) \in U_h$ по определению функции g; следовательно, $(x, y) \in \overset{3}{U}_k \subset U_{k-1}$, откуда $g(x, y) \leqslant 2^{1-k} \leqslant 2a$.

Итак, неравенства (2) установлены; они показывают, что при каждом $a > 0$ множество $\overset{-1}{f}([0, a])$ содержит U_k для всех индексов k таких, что $2^{-k} < a$, и что, обратно, всякое U_k содержит множество $\overset{-1}{f}([0, 2^{-k-1}])$; таким образом, множества $\overset{-1}{f}([0, a])$ образуют фундаментальную систему окружений структуры $\mathcal{U}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Равномерная структура $\mathcal{U}$ в E определяется семейством Ф *всех отклонений на* E, *равномерно непрерывных на* $E \times E$. В самом деле, ясно, что равномерная структура, определенная в E семейством Ф, *мажорируется* структурой $\mathcal{U}$; с другой стороны, теорема 1 показывает, что существует подсемейство семейства Ф, определяющее равномерную структуру $\mathcal{U}$, так что равномерная структура, определяемая Ф, *мажорирует* $\mathcal{U}$; значит, она совпадает с $\mathcal{U}$.

5. *Равномеризуемые пространства*

В главе II, § 4, n° 1 мы поставили проблему характеризации равномеризуемых топологических пространств; ее решение дает следующая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы топологическое пространство* E *было равномеризуемо, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло следующей аксиоме*:

(O_{IV}) *Каковы бы ни были точка* $x_0 \in E$ *и ее окрестность* V, *существует непрерывная функция на* E *со значениями в* $[0, 1]$, *равная* 0 *в точке* x_0 *и* 1 *на* $\complement V$.

Условие *необходимо*. В самом деле, если в пространстве E существует равномерная структура, согласующаяся с его топологией, то по теореме 1 эта структура может быть задана семейством (f_ι) отклонений на E, причем всегда можно считать, что это семейство *насыщенно* (n° 2). По определению окружений равномерной структуры, определяемой таким семейством отклонений, существуют отклонение f_α из семейства (f_ι) и число $a > 0$ такие, что $f_\alpha(x_0, x) \geqslant a$ для всех $x \in \complement V$; а отсюда следует, что функция

$g(x) = \inf\left(1, \frac{1}{a} f_\alpha(x_0, x)\right)$ удовлетворяет всем требованиям аксиомы.

Условие *достаточно*. В самом деле, пусть Φ — множество *всех непрерывных отображений* E *в* $[0, 1]$. Аксиома (O_{IV}) устанавливает, что *слабейшая из равномерных структур в* E, *для которых функции из* Φ *равномерно непрерывны, согласуется* с топологией пространства E (гл. II, 2-е изд., § 5, n° 1; 3-е изд., § 2, n° 3).

Определение 4. *Топологическое пространство называется вполне регулярным, если оно равномеризуемо и отделимо.*

По теореме 2 то же самое можно выразить, сказав, что пространство вполне регулярно, если оно удовлетворяет аксиомам (H) и (O_{IV}).

Замечание. Аксиома (O_{IV}) влечет (O_{III}) (см. гл. I, 2-е изд., § 6, n° 7; 3-е изд., § 8, n° 4), ибо если V — окрестность точки x_0 и f — непрерывная числовая функция на E со значениями в $[0, 1]$ такая, что $f(x_0) = 0$ и $f(x) = 1$ для всех $x \in \complement V$, то множество $\overline{f}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ есть *замкнутая* окрестность точки x_0, содержащаяся в V. В частности, всякое *вполне регулярное* пространство *регулярно* (что и оправдывает терминологию). Напротив, можно привести примеры регулярных пространств, не являющихся вполне регулярными *), откуда видно, что (O_{III}) не влечет (O_{IV}).

Как известно (гл. II, § 4, теорема 1), всякое компактное пространство, а значит и всякое подпространство компактного пространства, вполне регулярно. Мы сейчас дополним это предложение доказательством его *обращения*; иными словами, справедливо

Предложение 3. *Для того чтобы топологическое пространство* E *было вполне регулярно, необходимо и достаточно, чтобы оно было гомеоморфно подпространству компактного пространства.*

В самом деле, рассмотрим слабейшую из равномерных структур в E, при которых все непрерывные отображения E в $[0, 1]$ равномерно непрерывны; мы использовали эту структуру при доказательстве теоремы 2 и видели, что она согласуется с топологией пространства E, если E равномеризуемо. Если E, кроме того,

*) См. A. Tychonoff, Math. Ann. 52 (1930), стр. 553.

отделимо, то в силу компактности интервала $[0, 1]$ и в силу предложения 5 § 5 главы II (3-е изд., гл. II, § 4, предложение 3) эта равномерная структура будет структурой *предкомпактного* пространства. Следовательно, пополнение E, наделенного этой структурой, будет компактно, чем предложение доказано.

Можно еще сказать, что вполне регулярное пространство можно *погрузить* в компактное пространство; часто оказывается удобным придать этому результату следующий вид.

Будем вообще называть *кубом* произведение K^I семейства топологических пространств, совпадающих с *компактным интервалом* $K \subset \mathbf{R}$, с произвольным множеством индексов I (если I конечно и состоит из n элементов, мы приходим снова к понятию *замкнутого n-мерного куба*, введенному в n° 1 § 1 гл. VI); куб есть *компактное* пространство (гл. I, 2-е изд., § 10, теорема 3; 3-е изд., § 9, теорема 3).

Предложение 4. *Вполне регулярное топологическое пространство E гомеоморфно подпространству некоторого куба.*

В самом деле, пусть $(f_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство всех непрерывных отображений E в $K = [0, 1]$. Рассмотрим отображение $x \mapsto (f_\iota(x))$ пространства E в K^I; будем обозначать его g. Согласно аксиомам (II) и (O_{IV}) для каждой пары различных точек x, y из E существует индекс ι такой, что $f_\iota(x) \neq f_\iota(y)$; следовательно, g есть *взаимно однозначное* отображение E в K^I. С другой стороны, ясно, что g есть *изоморфизм* слабейшей из равномерных структур, при которых все f_ι равномерно непрерывны, на равномерную структуру, индуцированную в $g(E)$ равномерной структурой произведения K^I; значит, и подавно g есть гомеоморфизм E на $g(E)$.

6. *Полунепрерывные функции на равномеризуемом пространстве*

В главе IV (§ 6, следствие теоремы 4) мы видели, что верхняя огибающая семейства непрерывных числовых функций на топологическом пространстве есть полунепрерывная снизу функция. В *равномеризуемом* пространстве имеет место, кроме того, следующее *обратное* предложение:

Предложение 5. *Для того чтобы всякая полунепрерывная снизу числовая* (конечная или нет) *функция f на топологическом пространстве E была верхней огибающей непрерывных числовых* (конечных или нет) *функций на E, необходимо и достаточно, чтобы E было равномеризуемо.*

Условие *необходимо*. В самом деле, пусть x_0 — произвольная точка из E и V — ее произвольная открытая окрестность; характеристическая функция φ_V множества V полунепрерывна снизу (гл. IV, § 6, следствие предложения 1); следовательно, по предположению, существует непрерывная числовая функция g на E такая, что $g \leqslant \varphi_V$ и $g(x_0) = a > 0$; непрерывная функция $\inf\left(1, \frac{1}{a} g^+\right)$ принимает значения в $[0, 1]$, равна 0 на $\complement V$ и 1 в точке x_0; следовательно (теорема 2), E равномеризуемо.

Условие *достаточно*. Рассмотрим сначала случай, когда f принимает значения в $[-1, +1]$. Требуется показать, что для каждой точки $x_0 \in E$ и каждого числа $a < f(x_0)$ существует непрерывная числовая функция g на E такая, что $g \leqslant f$ и $g(x_0) \geqslant a$. Если $a \leqslant -1$, то в качестве g достаточно взять постоянную -1. Если $-1 < a < f(x_0)$, то существует окрестность V точки x_0 такая, что $f(x) \geqslant a$ для всех $x \in V$. Поскольку E равномеризуемо, существует непрерывная числовая функция h на E со значениями в $[0, 1]$ такая, что $h(x_0) = 0$ и $h(x) = 1$ для всех $x \in \complement V$. Положив тогда $g(x) = a - (a + 1)\, h(x)$, получим непрерывную функцию, удовлетворяющую поставленным требованиям. Отметим, что эта функция принимает значения в интервале $[-1, +1]$.

Общий случай получается из рассмотренного переносом структуры: в самом деле, существует строго возрастающий гомеоморфизм интервала $[-1, +1]$ на $\overline{\mathbf{R}}$ (гл. IV, § 4, предложение 2), а определение полунепрерывной функции связано только со структурой порядка и топологией в $\overline{\mathbf{R}}$.

Замечание. Из проведенного доказательства видно, что функция g не принимает значения $+1$. Посредством переноса структуры заключаем отсюда, что всякая полунепрерывная снизу числовая функция f на равномеризуемом пространстве E есть верхняя огибающая непрерывных числовых функций $g \leqslant f$ на E, *не принимающих значения* $+\infty$.

Упражнения

1) Для того чтобы положительная числовая функция f, определенная на $E \times E$, была *отклонением* на E, необходимо и достаточно, чтобы $f(x, x) = 0$ для всех $x \in E$ и $f(x, y) \leqslant f(x, z) + f(y, z)$ для всех x, y, z из E.

2) Пусть f — отображение $E \times E$ в $[0, +\infty]$; для того чтобы семейство множеств $f^{-1}([0, a])$, где a пробегает все числа >0, составляло фундаментальную систему окружений некоторой равномерной структуры в E, необходимо и достаточно, чтобы f удовлетворяло следующим условиям: а) $f(x, x) = 0$ для всех $x \in E$; б) для каждого $a > 0$ существует $b > 0$ такое, что $f(x, y) \leqslant b$ влечет $f(y, x) \leqslant a$; в) для каждого $a > 0$ существует $c > 0$ такое, что соотношения $f(x, z) \leqslant c$ и $f(z, y) \leqslant c$ влекут $f(x, y) \leqslant a$.

В частности, условия б) и в) выполнены, если существуют отображение φ интервала $I = [0, +\infty]$ на себя, непрерывное и равное нулю в точке 0, и отображение ψ произведения $I \times I$ в I, непрерывное и равное нулю в точке $(0, 0)$, такие, что $f(y, x) \leqslant \varphi(f(x, y))$ и $f(x, y) \leqslant \psi(f(x, z), f(z, y))$ для всех x, y, z из E.

3) Пусть E — топологическое пространство, $\mathscr{T}$ — его топология, (f_ι) — *насыщенное* (n° 2) семейство отклонений на E и $\mathscr{U}$ — определенная им равномерная структура.

а) Для того чтобы топология, порожденная равномерной структурой $\mathscr{U}$, *мажорировалась* топологией $\mathscr{T}$, необходимо и достаточно, чтобы все f_ι были непрерывны на $E \times E$ (в произведении топологии $\mathscr{T}$ на себя).

б) Для того чтобы топология, порожденная равномерной структурой $\mathscr{U}$, *мажорировала* топологию $\mathscr{T}$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $x_0 \in E$ и каждой ее окрестности V (в топологии $\mathscr{T}$) существовали индекс ι и число $a > 0$ такие, что $f_\iota(x_0, x) \geqslant a$ для всех $x \in \complement V$.

4) Пусть E — неотделимое равномеризуемое пространство и R — отношение $y \in \overline{\{x\}}$ между двумя общими точками x, y из E.

а) Показать, что R есть отношение эквивалентности в E, что всякое непрерывное отображение E в отделимое пространство *согласуется* с отношением R (Теор. множ., Сводка результ., § 5, n° 7) и что факторпространство E/R вполне регулярно.

б) Для всякой равномерной структуры $\mathscr{U}$ в E, согласующейся с его топологией, отделимая равномерная структура, *ассоциированная* с $\mathscr{U}$ (гл. II, § 1, n° 4), определена в факторпространстве E/R и согласуется с топологией этого пространства; топологическое пространство E/R называется вполне регулярным пространством, *ассоциированным* с равномеризуемым пространством E.

5) Пусть E — равномеризуемое пространство; показать, что семейство *всех* отклонений на E, *непрерывных* на $E \times E$, определяет в E равно-

мерную структуру, согласующуюся с его топологией. Эта равномерная структура $\mathscr{U}_0$ (называемая *универсальной* равномерной структурой в E) является сильнейшей из всех равномерных структур в E, согласующихся с его топологией. Каково бы ни было равномерное пространство F, всякое непрерывное отображение E в F равномерно непрерывно при наделении E его универсальной структурой, причем это предложение неверно для всякой другой равномерной структуры, согласующейся с топологией пространства E. Показать, что если в E существует равномерная структура $\mathscr{U}$, согласующаяся с его топологией, такая, что E, наделенное этой структурой, полно, то E, наделенное равномерной структурой $\mathscr{U}'$, мажорирующей $\mathscr{U}$ и мажорируемой $\mathscr{U}_0$, тоже полно. [Заметить, что структуры $\mathscr{U}'$ и $\mathscr{U}_0$ порождают одни и те же фильтры Коши.]

*6) а) Пусть E — вполне регулярное пространство, $\mathscr{U}$ — равномерная структура, согласующаяся с его топологией, и $\mathscr{U}^*$ — слабейшая из равномерных структур в E, при которых остаются равномерно непрерывными все отображения E в $[0, 1]$, равномерно непрерывные при наделении E структурой $\mathscr{U}$. Показать, что равномерная структура $\mathscr{U}^*$ отделима, согласуется с топологией пространства E и что E, наделенное этой равномерной структурой, *предкомпактно*.

б) Пусть K — произвольное компактное пространство. Показать, что всякое отображение f пространства E в K, равномерно непрерывное при наделении E структурой $\mathscr{U}$, остается равномерно непрерывным и при наделении E структурой $\mathscr{U}^*$. [Заметить, что единственная равномерная структура в K, согласующаяся с его топологией, совпадает со слабейшей из равномерных структур, при которых все непрерывные отображения K в $[0, 1]$ равномерно непрерывны.] Вывести отсюда, что $\mathscr{U}^*$ есть сильнейшая из мажорируемых $\mathscr{U}$ равномерных структур в E, при которых E предкомпактно.

*7) Пусть E — вполне регулярное пространство и $\mathscr{U}_0$ — универсальная равномерная структура в E (упражнение 5); равномерная структура $\mathscr{U}_0^*$ (упражнение 6) есть не что иное как слабейшая из равномерных структур в E, при которых все непрерывные отображения E в $[0, 1]$ равномерно непрерывны. Обозначим через $\widetilde{E}$ компактное пространство, получаемое пополнением пространства E, наделенного структурой $\mathscr{U}_0^*$; $\widetilde{E}$ называют *компактификацией Стоуна — Чеха* пространства E.

а) Показать, что всякое непрерывное отображение пространства E в компактное пространство K допускает продолжение до непрерывного отображения $\widetilde{E}$ в K (см. Теор. множ., гл. IV, § 3).

б) Пусть f — гомеоморфизм пространства E на всюду плотное подпространство E' компактного пространства K и $\overline{f}$ — непрерывное отображение $\widetilde{E}$ в K, продолжающее f; показать, что

$$\overline{f}(\widetilde{E} - E) = K - E'.$$

[Предположим, что существует $a \in \widetilde{E} - E$, для которого $\widetilde{f}(a) = f(b)$, где $b \in E$; рассмотреть непрерывное отображение g пространства $\widetilde{E}$ в $[0, 1]$ такое, что $g(b) = 0$, $g(a) = 1$, и множество P тех $x \in E$, для которых $g(x) \geqslant 1/2$; существует непрерывное отображение h пространства K в $[0, 1]$ такое, что $h(f(b)) = 0$ и $h(f(x)) = 1$ для всех $x \in P$; показать, что равенство $h(\widetilde{f}(a)) = 0$ противоречит тому, что a есть точка прикосновения для P в $\widetilde{E}$.]

*8) Пусть E — вполне регулярное пространство и $\widetilde{E}$ — его компактификация Стоуна — Чеха.

а) Фильтр $\mathfrak{F}$ в E называется *вполне регулярным*, если он обладает базисом $\mathfrak{B}$, состоящим из открытых множеств, таким, что для каждого множества $A \in \mathfrak{B}$ существуют множество $B \in \mathfrak{B}$, содержащееся в A, и непрерывное отображение f пространства E в $[0, 1]$, равное 0 на B и 1 на $\mathbf{C}A$. Вполне регулярный фильтр называется *максимальным*, если не существует более сильного вполне регулярного фильтра. Показать, что для каждого вполне регулярного фильтра $\mathfrak{F}$ существует максимальный вполне регулярный фильтр, мажорирующий $\mathfrak{F}$. [Использовать теорему Цорна.]

б) Для того чтобы вполне регулярный фильтр $\mathfrak{F}$ был максимальным, необходимо и достаточно, чтобы для каждой пары открытых множеств A, B в E такой, что $B \subset A$ и существует непрерывное отображение f пространства E в $[0, 1]$, равное 0 на B и 1 на $\mathbf{C}A$, выполнялось следующее условие: либо $A \in \mathfrak{F}$, либо $A \notin \mathfrak{F}$ и в $\mathfrak{F}$ существует множество, не пересекающееся с B. [Если все множества из $\mathfrak{F}$ пересекаются с B, рассмотреть фильтр, порожденный всеми множествами из $\mathfrak{F}$ и множествами $\widetilde{f}^{-1}([0, a[)$, где a пробегает открытый интервал $]0, 1[$.]

в) Показать, что всякий максимальный вполне регулярный фильтр $\mathfrak{F}$ есть фильтр Коши относительно равномерной структуры в E, индуцированной на $\widetilde{E}$. [Рассуждая от противного и используя б), показать, что каждое непрерывное отображение f пространства E в $[0, 1]$ имеет предел по $\mathfrak{F}$.]

г) Два различных максимальных вполне регулярных фильтра $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ не могут сходиться к одной и той же точке в $\widetilde{E}$. [Заметить, что, согласно б), существуют непересекающиеся открытые множества $A \in \mathfrak{F}$ и $A' \in \mathfrak{F}'$; далее рассуждать от противного, используя $(\mathrm{O_{IV}})$.]

д) След $\mathfrak{V}$ на E фильтра окрестностей произвольной точки $x_0 \in \widetilde{E}$ есть максимальный вполне регулярный фильтр. [Рассуждать от противного, используя определения вполне регулярного фильтра и фильтра окрестностей точки в $\widetilde{E}$.]

9) а) Пусть E — топологическое пространство, $\mathscr{T}$ — его топология и $(f_\iota)_{\iota \in I}$ — некоторое семейство отображений E в $K = [0, 1]$, непрерывных в топологии $\mathscr{T}$. Пусть $\mathscr{T}_0$ — слабейшая из топологий в E,

при которых все f_ι непрерывны. Показать, что для того, чтобы $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$, достаточно, чтобы семейство множеств $f_\iota^{-1}([0, a[)$, где a пробегает открытый интервал $]0, 1[$, а ι пробегает I, было *системой образующих* топологии $\mathcal{T}$ (гл. I, § 2, n° 3). Пространство E тогда равномеризуемо и в случае отделимости гомеоморфно некоторому подпространству куба K^I.

б) Предположим, что (f_ι) есть семейство *всех* непрерывных (в $\mathcal{T}$) отображений E в K. Показать, что для каждого компактного пространства F всякое отображение E в F, непрерывное в топологии $\mathcal{T}$, непрерывно и в топологии $\mathcal{T}_0$. [Погрузить F в куб.] Для того чтобы топология $\mathcal{T}$ была равномеризуемой, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$.

10) Пусть E — вполне регулярное пространство, K — его компактное подмножество и V — окрестность K в E.

а) Показать, что существует непрерывное отображение E в $[0, 1]$, равное 1 на K и 0 на $\complement V$. [Использовать (O_{IV}), покрывая K конечным числом надлежащих окрестностей.]

б) Пусть E' — факторпространство, получаемое отождествлением в E всех точек из K. Показать, что E' вполне регулярно.

*11) Пусть E — вполне регулярное пространство. Замкнутые множества A, B в E называются *нормально отделимыми*, если существует непрерывное отображение f пространства E в $[0, 1]$ такое, что $f(x) = 0$ на A и $f(x) = 1$ на B.

а) Пусть $\widetilde{E}$ — компактификация Стоуна — Чеха пространства E. Показать, что для того, чтобы замкнутые подмножества A, B пространства E обладали непересекающимися замыканиями в $\widetilde{E}$, необходимо и достаточно, чтобы A и B были нормально отделимы. [Использовать упражнения 7а) и 10а).]

б) Пусть h — гомеоморфизм пространства E на всюду плотное подпространство E' компактного пространства K и $\overline{h}$ — непрерывное отображение $\widetilde{E}$ в K, продолжающее h. Предположим, что для каждой пары нормально отделимых замкнутых множеств A, B в E замыкания множеств $h(A)$ и $h(B)$ в K не пересекаются. Показать, что $\overline{h}$ есть гомеоморфизм $\widetilde{E}$ на K. [Доказать, что $\overline{h}$ инъективно: предполагая, что a, b — две различные точки в $\widetilde{E}$, для которых $\overline{h}(a) = \overline{h}(b)$, рассмотреть множества $E \cap f^{-1}([0, 1/3])$ и $E \cap f^{-1}([2/3, 1])$, где f — непрерывное отображение $\widetilde{E}$ в $[0, 1]$ такое, что $f(a) = 0$, $f(b) = 1$.]

*12) Пусть $\widetilde{E}$ — компактификация Стоуна — Чеха вполне регулярного пространства E.

а) Пусть f — непрерывная конечная числовая функция на $\widetilde{E}$ такая, что $f(x) > 0$ на E и множество $A = f^{-1}(0) \subset \widetilde{E} - E$ не пусто; тогда в E существует последовательность точек (a_n), для которой

последовательность чисел $\lambda_n = f(a_n) > 0$ строго убывает и $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Сопоставим каждому целому $n > 0$ открытый интервал I_n в $\mathbf{R}^*_+$ с центром λ_n так, чтобы замкнутые интервалы $\bar{I}_n$ попарно не пересекались, и пусть $M_n = f^{-1}(I_n) \cap E$. Пусть M_H для каждого множества $H \subset \mathbf{N}$ есть объединение всех множеств M_n, у которых $n \in H$; для каждого фильтра $\mathfrak{F}$ в $\mathbf{N}$, мажорирующего фильтр Фреше, обозначим через $\mathfrak{F}'$ фильтр в E базис которого образуют множества M_H, где H пробегает $\mathfrak{F}$. Показать, что $\mathfrak{F}'$ — вполне регулярный фильтр (упражнение 8) и что если $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — два различных ультрафильтра в $\mathbf{N}$, мажорирующих фильтр Фреше, то в E не существует фильтра, мажорирующего $\mathfrak{F}'_1$ и $\mathfrak{F}'_2$. Вывести отсюда, что $\mathrm{Card}(A) \geqslant 2^{2^{\mathrm{Card}(\mathbf{N})}}$. [Использовать упражнения 8 и 14в) § 8 гл. I.]

б) Предположим, что E бесконечно и *дискретно*. Показать, что равномерной структурой, индуцируемой в E из $\widetilde{E}$, служит равномерная структура конечных разбиений (гл. II, 2-е изд., § 3, упражнение 4 и § 4, упражнение 13; 3-е изд., § 4, упражнения 12 и 12б)). [Использовать упражнение 11б)]. Вывести отсюда, что $\mathrm{Card}(\widetilde{E}) = 2^{2^{\mathrm{Card}(E)}}$ (см. гл. I, § 8, упражнение 14в)*)). Показать, что на $\widetilde{E}$ существует непрерывная числовая функция $f \geqslant 0$, для которой $f^{-1}(0)$ не пусто и содержится в $\widetilde{E} - E$.

в) При тех же предпосылках, что и в б), показать, что если A — бесконечное замкнутое множество в $\widetilde{E}$, то $\mathrm{Card}(A) \geqslant 2^{2^{\mathrm{Card}(\mathbf{N})}}$. [Показать сначала, что в A существует бесконечная последовательность точек (a_n), обладающих попарно непересекающимися окрестностями V_n в $\widetilde{E}$; вывести отсюда, что всякая ограниченная числовая функция f, определенная на множестве D точек a_n, продолжается до непрерывной функции на $\widetilde{E}$: рассмотреть для этого числовую функцию g, определенную на E и равную $f(a_n)$ для всех точек из $E \cap V_n$. Заключить, что $\overline{D} \subset A$ гомеоморфно компактификации Стоуна — Чеха множества D (см. § 4, упражнение 17).]

13) Пусть G — некомпактная локально компактная топологическая группа. Показать, что равномерная структура, индуцируемая в произведении $H = G \times G$ равномерной структурой его компактификации Стоуна — Чеха $\widetilde{H}$, сильнее равномерной структуры, индуцируемой из $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$. [Применяя упражнение 7а) к отображению $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$ пространства H в G, показать, что в противном случае

---

*) В 3-м изд. воспроизведены только пункты а) и б) этого упражнения (гл. I, § 4, упражнение 5). Пункт в): Вывести из а) и б), что в A множество всех ультрафильтров и множество всех фильтров равномощны $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A))$.— *Ред.*

группа G была бы изоморфна подгруппе компактной группы, и затем использовать предложение 4 § 3 главы III.]

14) Показать, что если каждая точка топологического пространства E обладает *замкнутой* окрестностью, являющейся равномеризуемым подпространством пространства E, то E равномеризуемо.

*15) а) Пусть E — локально компактное пространство, Φ — множество всех его непрерывных отображений g в $[0, 1]$, *равных нулю на дополнении некоторого компактного множества* (зависящего от g), и $\mathscr{U}_1$ — слабейшая из равномерных структур в E, при которых все функции $g \in \Phi$ равномерно непрерывны. Показать, что $\mathscr{U}_1$ согласуется с топологией пространства E, что пополнение $\hat{E}$ пространства E, наделенного этой структурой, компактно и что дополнение к E в $\hat{E}$ либо пусто, либо сводится к одной точке. [Показать, что если E не компактно, то фильтр дополнений относительно компактных множеств в E есть фильтр Коши относительно структуры $\mathscr{U}_1$.]

б) Показать, что равномерная структура $\mathscr{U}_1$ является *слабейшей* из равномерных структур, согласующихся с топологией пространства E.

в) Обратно, пусть E — такое вполне регулярное пространство, что в множестве равномерных структур, согласующихся с его топологией, существует структура $\mathscr{U}_1$, мажорируемая всеми остальными. Показать, что E локально компактно. [Используя упражнение 6, показать, что E, наделенное структурой $\mathscr{U}_1$, предкомпактно; убедиться затем, что дополнение к E относительно его пополнения в структуре $\mathscr{U}_1$ не может содержать более одной точки.]

г) Предположим, что E локально компактно и счетно в бесконечности, так что (гл. I, 2-е изд., § 10, n° 11; 3-е изд., § 9, n° 9) E представимо в виде объединения возрастающей последовательности (U_n) относительно компактных открытых множеств таких, что $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$. Показать, что на E существует непрерывная числовая функция f такая, что $f(x) \leqslant n$ для всех $x \in \overline{U}_n$ и $f(x) \geqslant n$ для всех $x \in \mathbf{C}\overline{U}_n$. [См. упражнение 10а).] Пусть $\mathscr{U}_2$ — слабейшая из равномерных структур в E, при которых все функции $g \in \Phi$ и функция f равномерно непрерывны; показать, что эта структура согласуется с топологией пространства E и обладает окружением V таким, что $V(x)$ относительно компактно в E для каждого $x \in E$. [См. гл. II, 2-е изд., § 4, упражнение 10; 3-е изд., § 4, упражнение 9.]

*16) Пусть E — полное отделимое равномерное пространство и $\mathscr{U}$ — его равномерная структура.

а) Пусть A — объединение последовательности (F_n) замкнутых подмножеств пространства E и $x \notin A$. Показать, что на E существует непрерывная конечная числовая функция $f \geqslant 0$ такая, что $f(x) = 0$ и $f(y) > 0$ для всех $y \in A$. [Рассмотреть функцию $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)/2^n$,

где g_n — непрерывные отображения E в $[0, 1]$ такие, что $g_n(x) = 0$ и $g_n(y) = 1$ для всех $y \in F_n$.]

б) Пусть h — непрерывная числовая функция $\geqslant 0$ на E и V — открытое множество $h^{-1}(]0, +\infty[)$. Рассмотрим в V равномерную структуру $\mathscr{U}'$, являющуюся верхней гранью структуры, которую индуцирует $\mathscr{U}$, и равномерной структуры, определенной отклонением

$$r(x, y) = \left| \frac{1}{h(x)} - \frac{1}{h(y)} \right|.$$

Показать, что V полно в $\mathscr{U}'$.

в) Пусть B — пересечение семейства множеств (A_λ), каждое из которых есть объединение счетного семейства замкнутых подмножеств пространства E. Показать, что в B существует такая равномерная структура, согласующаяся с топологией, индуцируемой на E, что B в этой структуре полно. [Использовать б).]

17) Пусть E — топологическое пространство, в котором открыто-замкнутые окрестности каждой точки образуют фундаментальную систему ее окрестностей. Показать, что E равномеризуемо.

18) Пусть E — *счетное* вполне регулярное пространство. Показать, что открыто-замкнутые окрестности каждой точки $x \in E$ образуют фундаментальную систему окрестностей этой точки. [См. § 6, n° 4.]

20) Пусть E — локально компактное пространство. Показать, что всякая полунепрерывная снизу функция $f \geqslant 0$ на E есть верхняя огибающая семейства непрерывных функций $\geqslant 0$, каждая из которых равна нулю на дополнении некоторого компактного множества.

21) а) Пусть E — вполне регулярное пространство и a — его точка; для того чтобы на E существовала непрерывная функция $f \geqslant 0$ такая, что $f(a) = 0$ и $f(x) > 0$ для всех $x \neq a$, необходимо и достаточно, чтобы точка a обладала последовательностью (V_n) окрестностей такой, что $\{a\} = \bigcap_n V_n$. [См. упражнение 16а).]

б) Пусть E — вполне регулярное пространство, каждая точка которого обладает счетной фундаментальной системой окрестностей. Показать, что в его компактификации Стоуна — Чеха $\widetilde{E}$ множество E совпадает с множеством точек, обладающих счетной фундаментальной системой окрестностей в $\widetilde{E}$. [Использовать а) и упражнение 12.] Пусть также E' — вполне регулярное пространство, каждая точка которого обладает счетной фундаментальной системой окрестностей; показать, что если компактификации Стоуна — Чеха $\widetilde{E}$ и $\widetilde{E}'$ гомеоморфны, то также E и E' гомеоморфны.

*22) а) Пусть E — топологическое пространство. Доказать равносильность следующих двух свойств: α) всякая непрерывная конечная числовая функция на E ограничена; β) всякая непрерывная и ограниченная числовая функция на E обладает наименьшим и наибольшим

значениями. Пространство E, обладающее этими свойствами, называется *вейерштрассовым*. Для каждого непрерывного отображения f вейерштрассова пространства E в топологическое пространство E' подпространство $f(E)$ пространства E' вейерштрассово.

б) Рассмотрим следующие два свойства топологического пространства E: γ) для каждого счетного открытого покрытия (U_n) пространства E последнее является объединением конечного числа множеств $\overline{U}_n$; δ) всякий счетный базис фильтра в E, состоящий из открытых множеств, имеет по крайней мере одну точку прикосновения. Показать, что свойства γ) и δ) равносильны и влекут вейерштрассовость пространства E. В частности, всякое абсолютно замкнутое пространство (гл. I, 2-е изд., § 10, упражнение 10; 3-е изд., § 9, упражнение 19) вейерштрассово. Если E обладает свойствами γ) и δ), то ими обладает и всякое его подпространство вида $\overline{A}$, где A — открытое множество. [См. § 4, упражнение 26б).]

в) Рассмотрим следующее свойство топологического пространства E: ζ) всякое локально конечное открытое покрытие пространства E конечно. Показать, что ζ) влечет γ). [Пусть (U_n) — возрастающая последовательность открытых подмножеств пространства E, образующая его покрытие и такая, что $U_{n+1} \not\subset \overline{U}_n$; рассмотреть покрытие, состоящее из множеств $U_{n+1} \cap \mathbf{C}\overline{U}_n$ и дополнения последовательности (a_n) такой, что $a_{n+1} \in U_{n+1} \in \mathbf{C}\overline{U}$.] Доказать, что если E регулярно, то γ) влечет ζ). [Пусть (U_α) — бесконечное локально конечное открытое покрытие пространства E. Определить по индукции последовательность (α_n) индексов, последовательность (x_n) точек из E и для каждой точки x_n две ее открытые окрестности V_n, W_n, такие, что: 1° $\overline{V}_n \subset W_n$, $\overline{W}_n \subset U_{\alpha_n}$ и W_n пересекается лишь с конечным числом множеств U_α; 2° U_{α_n} не пересекает ни одного W_k с индексом $k < n$. Рассмотреть затем покрытие пространства E, образованное множествами W_n и дополнением к объединению множеств $\overline{V}_n$.]

г) Во вполне регулярном пространстве E свойства α), β), γ), δ), ζ) равносильны друг другу и следующему свойству: 0) E предкомпактно во всякой равномерной структуре, согласующейся с его топологией. [Чтобы убедиться в том, что α) влечет ζ), заметить, опираясь на (O_{IV}), что если (U_n) — счетно-бесконечное локально конечное открытое покрытие пространства E и $a_n \in U_n$, то на E существует непрерывная числовая функция f такая, что $f(a_n) = n$ для всех n. Для доказательства того, что 0) влечет α), использовать упражнение 5 и заметить, что на предкомпактном пространстве всякая равномерно непрерывная числовая функция ограничена. Чтобы доказать, что γ) влечет 0), заметить, что если E не предкомпактно в равномерной структуре $\mathscr{U}$, то существуют симметричное окружение V этой структуры и последовательность (x_n) точек из E такие, что множества $V(x_n)$ попарно не пересекаются.]

д) Вполне регулярное вейерштрассово пространство, полное в некоторой равномерной структуре, согласующейся с его топологией, компактно.

е) Во вполне регулярном вейерштрассовом пространстве E универсальная равномерная структура (упражнение 5) индуцируется равномерной структурой его компактификации Стоуна — Чеха и является единственной равномерной структурой, согласующейся с топологией пространства E, при которой все непрерывные отображения E в $[0, 1]$ равномерно непрерывны.

*23) Пусть E — отделимое равномерное пространство, F — его замкнутое подмножество и f — ограниченная равномерно непрерывная числовая функция на F. Показать, что f обладает ограниченным равномерно непрерывным продолжением $\bar{f}$ на E [Можно считать, что $f(F) \subset [0, 1]$. Каждой двоичной дроби $r = k/2^n \in [0, 1]$ отнесем множество $A(r)$ тех точек $x \in F$, для которых $f(x) \leqslant r$, и пусть $B(r) = A(r) \cup (E - F)$. Определить по индукции (как при доказательстве теоремы 1 § 4) для каждой двоичной дроби $r \in [0, 1]$ открытое множество $U(r)$ так, чтобы для каждой пары двоичных дробей r, r', где $r < r'$, выполнялось следующее условие: существует окружение V равномерной структуры пространства E такое, что

$$V(A(r)) \subset U(r'), \quad V(U(r)) \subset U(r'), \quad V(U(r)) \subset B(r').$$

Принять тогда за $\bar{f}(x)$ нижнюю грань двоичных дробей r, для которых $x \in U(r)$.]

§ 2. Метрические пространства; метризуемые пространства

1. *Расстояния и метрические пространства*

Определение 1. *Расстоянием на множестве E называют конечное отклонение d на E, для которого отношение $d(x, y) = 0$ влечет $x = y$. Метрическим пространством называют множество E, наделенное структурой, определяемой заданием на E расстояния.*

Метрическое пространство E будет всегда считаться наделенным равномерной структурой и топологией, определяемыми заданным на E расстоянием.

Примеры. 1) Евклидово расстояние $d(x, y)$ (гл. VI, § 2, п° 1) есть расстояние на числовом пространстве $\mathbf{R}^n$; то же можно сказать о функциях $\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$ и $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$. Все эти расстояния *эквивалентны* (§ 1, п° 2).

2) Отклонение d, определенное на произвольном множестве E соотношениями $d(x, x) = 0$, $d(x, y) = 1$ при $x \neq y$, есть расстояние; равномерная структура, определяемая им в E, *дискретна*.

Определение, равносильное определению 1, получится, если сказать, что расстояние есть такое *конечное* отклонение, которое определяет *отделимую* равномерную структуру; следовательно, конечное отклонение, эквивалентное некоторому расстоянию, является расстоянием.

С равномерным пространством, определенным заданием *одного отклонения* (которое можно считать *конечным*), не являющегося расстоянием, можно связать метрическое пространство. Пусть f — такое отклонение на множестве E и $\mathscr{U}$ — определяемая им равномерная структура; эта структура неотделима, и пересечение ее окружений есть множество в $E \times E$, определяемое отношением эквивалентности $f(x, y) = 0$; обозначим это отношение через R. Если $x \equiv x' \pmod{R}$, то по неравенству треугольника $f(x, y) \leqslant f(x, x') + f(x', y) = f(x', y)$, и так же $f(x', y) \leqslant f(x, y)$, так что $f(x, y) = f(x', y)$; иначе говоря, f есть функция, *согласующаяся* (по x и y) с отношением эквивалентности R (Теор. множ., Сводка результ., § 5, n° 7). Пусть $\overline{f}$ — функция, полученная из f факторизацией (по x и y); она определена на $(E/R) \times (E/R)$, и если $\dot{x}$, $\dot{y}$ — классы $(\mathrm{mod}\ R)$ точек x, y из E, то $\overline{f}(\dot{x}, \dot{y}) = f(x, y)$. Отсюда сразу следует, что $\overline{f}$ — *расстояние* на E/R; его называют расстоянием, *ассоциированным* с отклонением f; при этом равномерная структура, определяемая им в E/R, есть не что иное, как отделимая равномерная структура, *ассоциированная* с $\mathscr{U}$ (гл. II, 2-е изд., § 1, n° 4; 3-е изд., § 3, n° 8). Таким образом, переходом к надлежащему факторпространству равномерная структура, определяемая одним отклонением, сводится к структуре метрического пространства.

Предложение 1 § 1 определяет структуру *пополнения* метрического пространства.

Предложение 1. Пусть E — *метрическое пространство*, d — *расстояние на* E *и* $\hat{E}$ — *пополнение* E (по равномерной структуре, определяемой расстоянием d); *функция* d *продолжается по непрерывности на* $\hat{E}$, *ее продолжение* $\overline{d}$ *является расстоянием на* $\hat{E}$

и равномерная структура в $\hat{E}$ совпадает с равномерной структурой, определяемой расстоянием $\overline{d}$.

В самом деле, предложение 1 § 1 показывает, что $\overline{d}$ — конечное отклонение на $\hat{E}$ и определяет в $\hat{E}$ равномерную структуру, получаемую при пополнении; поскольку последняя отделима, $\overline{d}$ есть *расстояние.* Рассматривая пополнение $\hat{E}$ метрического пространства E как метрическое пространство, всегда подразумевают, что расстояние на $\hat{E}$ получено продолжением по непрерывности расстояния на E.

2. Структура метрического пространства

Пусть E и E' — метрические пространства, d — расстояние на E и d' — на E'. В соответствии с общими определениями (Теор. множ., Сводка результ., § 8, n° 5), взаимно однозначное отображение f пространства E на E' есть *изоморфизм* структуры метрического пространства в E на структуру метрического пространства в E', если

$$d(x, y) = d'(f(x), f(y)) \tag{1}$$

для всех x и y из E.

Отметим, что отображение f пространства E на E', удовлетворяющее тождеству (1), необходимо *биективно* и, следовательно, является изоморфизмом E на E'; этот изоморфизм называют еще *изометрией* (или *изометрическим* отображением) E на E'.

Изометрия E на E', разумеется, является изоморфизмом равномерной структуры (соответственно топологии) пространства E на равномерную структуру (соответственно топологию) пространства E'; как показывает существование различных эквивалентных расстояний (§ 1, n° 2), обратное неверно.

Пусть E — метрическое пространство и d — определяющее его расстояние. Для каждого числа $a > 0$ обозначим через V_a множество тех точек $(x, y) \in E \times E$, для которых $d(x, y) < a$, и через W_a — множество тех точек (x, y), для которых $d(x, y) \leqslant a$; когда a пробегает множество всех чисел > 0 (или только их последовательность, стремящуюся к 0), множества V_a (соотв. W_a) образуют в силу непрерывности d (§ 1, n° 3) фундаментальную систему *открытых* (соотв. *замкнутых*) окружений равномерной

структуры пространства E; при этом $\overline{V}_a \subset W_a$, но эти два множества не обязательно совпадают.

По аналогии со случаем евклидова расстояния на $\mathbf{R}^n$, множество $V_a(x)$ (соотв. $W_a(x)$) называется *открытым* (соотв. *замкнутым*) *шаром* с *центром* x и *радиусом* a; это *открытое* (соотв. *замкнутое*) множество в E. Точно так же *сферой* с центром x и радиусом a называют множество тех точек y, для которых $d(x, y) = a$; это — *замкнутое* множество. Согласно предыдущему открытые (соотв. замкнутые) шары с центром x и радиусом a образуют фундаментальную систему окрестностей x, когда a пробегает множество всех чисел >0 или последовательность чисел >0, стремящуюся к 0.

Не следует обманываться введенной терминологией и думать, что в произвольном метрическом пространстве шары и сферы обладают теми же свойствами, что и евклидовы шары и сферы, изученные в § 2 главы VI. Так, например, замыкание открытого шара может отличаться от замкнутого шара с теми же центром и радиусом, граница замкнутого шара может отличаться от сферы с теми же центром и радиусом, открытый (или замкнутый) шар может не быть связным, а сфера может быть пустым множеством (см. упражнение 4).

Пусть A и B — произвольные непустые множества в метрическом пространстве E. *Расстоянием между множествами* A *и* B называют число

$$d(A, B) = \inf_{x \in A,\ y \in B} d(x, y).$$

В частности, через $d(x, A)$ обозначают расстояние между одноточечным множеством $\{x\}$ и множеством A; его называют *расстоянием от точки* x *до множества* A; таким образом,

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y),$$

откуда

$$d(A, B) = \inf_{x \in A} d(x, B)$$

(гл. IV, § 5, предложение 9).

Замечание. При $d(x, A) = a$ может случиться, что в A нет ни одной точки, расстояние которой от x равно a. Однако это не может иметь места, если A *компактно*, ибо тогда в силу теоремы Вейерштрасса (гл. IV, § 6, теорема 1) существует $y \in A$, для которого $d(x, A) = d(x, y)$.

Предложение 2. *Свойства* $d(x, A) = 0$ *и* $x \in \overline{A}$ *равносильны.*

В самом деле, свойство $d(x, A) = 0$ выражает, что шар $V_a'(x)$ пересекается с A при каждом $a > 0$, а это равносильно тому, что $x \in \overline{A}$.

Предложение 3. *Функция* $d(x, A)$ *равномерно непрерывна на* E.

В самом деле, пусть x, y — произвольные точки из E; для каждого $\varepsilon > 0$ существует $z \in A$ такое, что $d(y, z) \leqslant d(y, A) + \varepsilon$, откуда в силу неравенства треугольника

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \leqslant d(x, y) + d(y, A) + \varepsilon.$$

Тогда, тем более, $d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, A) + \varepsilon$, и так как ε произвольно, то $d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, A)$. Тем же способом получаем, что $d(y, A) \leqslant d(x, y) + d(x, A)$, так что

$$|\, d(x, A) - d(y, A) \,| \leqslant d(x, y), \tag{2}$$

откуда и вытекает справедливость предложения.

Замечание. Если ни одно из множеств A, B не одноточечно, то может оказаться, что $d(A, B) = 0$ и при $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$. Например, целые числа > 0 и точки последовательности $\left(n + \frac{1}{2n}\right)_{n \geqslant 1}$ образуют на числовой прямой $\mathbf{R}$ непересекающиеся замкнутые множества, расстояние между которыми равно нулю.

Однако если A *компактно* и B *замкнуто*, соотношение $d(A, B) = 0$ влечет $A \cap B \neq \varnothing$, ибо в силу соотношения $d(A, B) = \inf\limits_{x \in A} d(x, B)$, предложения 3 и теоремы Вейерштрасса существует $x_0 \in A$ такое, что $d(x_0, B) = d(A, B) = 0$, откуда (предложение 2) $x_0 \in B$.

Диаметром непустого множества A в E называют (конечное или равное $+\infty$) число $\delta(A) = \sup\limits_{x \in A,\ y \in A} d(x, y)$. Понятие множества «малого порядка W_a» (гл. II, § 3, n° 1) совпадает с понятием множества диаметра $\leqslant a$. Для того чтобы непустое множество A было одноточечным, необходимо и достаточно, чтобы $\delta(A) = 0$.

Множество $A \subset E$ называют *ограниченным* (относительно расстояния d), если его диаметр *конечен*. То же самое можно выразить, сказав, что, какова бы ни была точка $x_0 \in E$, A содержится в некотором шаре с центром в x_0. Всякое подмножество ограниченного

множества есть ограниченное множество; объединение конечного семейства ограниченных множеств есть ограниченное множество.

Отметим, что множество в E может быть ограниченным относительно расстояния d и неограниченным относительно некоторого расстояния, эквивалентного d (см. § 1, n° 2).

3. Колебание функции

С понятием диаметра связано понятие *колебания* функции f, определенной на произвольном множестве E и принимающей значение в *метрическом пространстве* E'; *колебанием функции* f *на произвольном непустом множестве* $A \subset E$ называют диаметр $\delta(f(A))$.

Если, кроме того, E есть подмножество *топологического пространства* F, то *колебанием функции* f *в точке* $x \in \overline{E}$ называют число $\omega(x; f) = \inf \delta(f(V \cap E))$, где V пробегает фильтр окрестностей точки x в F.

Предложение 4. *Колебание* $\omega(x; f)$ *произвольной функции* f, *определенной на подмножестве* E *топологического пространства* F *и принимающей значения в метрическом пространстве* E', *есть полунепрерывная сверху функция на* $\overline{E}$.

В самом деле, пусть a — произвольная точка из $\overline{E}$; для каждого $k > \omega(a; f)$ существует открытая окрестность V точки a такая, что $\delta(f(V \cap E)) < k$; но V есть окрестность любой точки $x \in V \cap \overline{E}$, так что

$$\omega(x; f) \leqslant \delta(f(V \cap E)) < k,$$

чем доказано, что функция ω полунепрерывна сверху в точке a.

Для того чтобы $\omega(x; f) = 0$ в точке $x \in \overline{E}$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовала окрестность V точки x такая, что $f(V \cap E)$ содержится в шаре радиуса ε; если $x \in E$, это условие выражает *непрерывность* функции f в точке x относительно E; если $x \in \overline{E} \cap \complement E$, то оно выражает, что образ относительно f следа на E фильтра окрестностей точки x в F есть *базис фильтра Коши* в E'; в частности:

Предложение 5. *Пусть* f — *функция, определенная на подмножестве* E *топологического пространства* F *и принимающая*

значения в полном *метрическом пространстве* E'; *для того чтобы* f *имела в точке* $x \in \bar{E}$ *предел относительно* E, *необходимо и достаточно, чтобы ее колебание в этой точке было равно нулю.*

4. *Метризуемые равномерные пространства*

Определение 2. *Говорят, что расстояние на множестве* E *согласуется с равномерной структурой* $\mathcal{U}$ *в* E, *если равномерная структура, определяемая этим расстоянием, совпадает с* $\mathcal{U}$.

Равномерную структуру в множестве E *называют метризуемой, если на* E *существует расстояние, согласующееся с этой равномерной структурой. Равномерное пространство называют метризуемым, если метризуема его равномерная структура.*

С одной и той же равномерной структурой могут согласоваться различные расстояния; они называются тогда *эквивалентными* (§ 1, n° 2, определение 2).

Теорема 1. *Для того чтобы равномерная структура была метризуемой, необходимо и достаточно, чтобы она была отделимой и фильтр ее окружений обладал счетным базисом.*

Условие *необходимо*, ибо (в обозначениях из n° 2) окружения $V_{1/n}$ $(n \geqslant 1)$ образуют базис фильтра окружений равномерной структуры метрического пространства.

Условие *достаточно*, ибо если оно выполнено, то, согласно предложению 2 § 1, рассматриваемая равномерная структура определяется одним отклонением, которое в силу отделимости структуры является расстоянием.

Следствие 1. *Отделимая равномерная структура, определяемая счетным семейством отклонений, метризуема.*

В самом деле, если (f_n) — последовательность отклонений, определяющих такую структуру, то фильтр окружений порождается счетным семейством множеств $f_n^{-1}([0,\ 1/m])$, где m и n пробегают все целые числа > 0.

Следствие 2. *Произведение всякого счетного семейства метризуемых равномерных пространств метризуемо.*

В самом деле, такое пространство отделимо и его равномерная структура обладает счетной фундаментальной системой окружений (гл. II, 2-е изд., § 5, n° 2; 3-е изд., § 2, n° 6).

5. *Метризуемые топологические пространства*

Определение 3. *Говорят, что расстояние на множестве E согласуется с топологией $\mathcal{T}$ в E, если топология, определенная этим расстоянием, совпадает с $\mathcal{T}$. Топологическое пространство E называют метризуемым, если на E существует расстояние, согласующееся с его топологией.*

Два расстояния на множестве E, согласующиеся с одной и той же топологией $\mathcal{T}$, могут быть *не эквивалентны*.

Пример доставляет подпространство $\mathbf{R}_+^*$ пространства $\mathbf{R}$, образованное всеми вещественными числами >0; равномерная структура, индуцируемая аддитивной равномерной структурой из $\mathbf{R}$, и равномерная структура, индуцируемая мультипликативной равномерной структурой из $\mathbf{R}^*$, обе метризуемы и согласуются с топологией подпространства $\mathbf{R}_+^*$, но не сравнимы.

Заметим также, что могут существовать *неметризуемые* равномерные структуры, согласующиеся с топологией *метризуемого* топологического пространства (упражнение 7).

Мы ограничимся здесь приведением *необходимого* условия метризуемости топологического пространства (необходимое и достаточное условие см. в упражнении 22 § 4). Прежде всего, топологическое пространство может быть метризуемым, только если оно *вполне регулярно* (мы увидим даже — см. § 4, n° 1, предложение 2,— что метризуемое пространство необходимо «нормально», что является более сильным условием). С другой стороны, по теореме 1 имеем

Предложение 6. *Всякая точка метризуемого пространства обладает счетной фундаментальной системой окрестностей.*

Более общим образом:

Предложение 7. *В метризуемом пространстве всякое замкнутое множество есть пересечение счетного семейства открытых множеств и всякое открытое множество есть объединение счетного семейства замкнутых множеств.*

В самом деле, пусть d — расстояние, согласующееся с топологией метризуемого пространства E. Если A замкнуто в E, то оно является пересечением открытых множеств $V_{1/n}(A)$ (где $V_{1/n}(A)$ — множество тех x, для которых $d(x, A) < 1/n$; см.

предложение 2). Вторая часть предложения получается из первой переходом к дополнениям.

Замечания. 1) Приведенные выше необходимые условия не являются достаточными (см. упражнение 13).

2) Можно указать примеры пространств, в которых всякая точка имеет счетную фундаментальную систему окрестностей, но не всякое замкнутое множество является пересечением счетного семейства открытых множеств (упражнение 15); такие пространства не метризуемы.

Следствие 2 теоремы 1 показывает, что произведение *счетного* семейства метризуемых топологических пространств метризуемо. Кроме того, *сумма* E (гл. I, 2-е изд., § 8, n° 10; 3-е изд., § 2, n° 4) *произвольного* семейства $(F_\iota)_{\iota \in I}$ метризуемых пространств метризуема: в самом деле, пусть d_ι для каждого $\iota \in I$ есть расстояние, согласующееся с топологией в F_ι; можно считать, что все d_ι ограничены и диаметры пространств F_ι не превышают 1; расстояние d, согласующееся с топологией суммы E, можно тогда определить, положив $d(x, y) = d_\iota(x, y)$, если x, y принадлежат одному и тому же пространству F_ι, и $d(x, y) = 1$ в противном случае.

6. *Роль счетных последовательностей*

Предложение 6 лежит в основе той роли, которую играют *счетные последовательности* точек в метрическом пространстве; во многих вопросах оказывается возможным использовать их вместо фильтров. Это связано с тем, что *фильтры окрестностей* точек пространства (а потому и все *сходящиеся фильтры*) определяются заданием *сходящихся последовательностей* точек этого пространства; в самом деле, поскольку фильтр окрестностей какой-либо точки обладает счетным базисом, он является пересечением мажорирующих его *элементарных фильтров* (гл. I, 2-е изд., § 5, предложение 10; 3-е изд., § 6, предложение 11), т. е. элементарных фильтров, ассоциированных с последовательностями, сходящимися к рассматриваемой точке.

Напротив, понятие сходящейся последовательности совершенно не приспособлено к изучению топологических пространств, содержащих точки, фильтр окрестностей которых не обладает счетным базисом. В частности, можно построить недискретные отделимые топологические пространства, в которых пересечение счетного семей-

ства окрестностей каждой точки все еще является окрестностью этой точки *); в таком пространстве сходятся только те последовательности, у которых все члены, начиная с некоторого, равны между собой.

В качестве примеров применения счетных последовательностей отметим следующие предложения.

Предложение 8. *Для того чтобы точка x метризуемого пространства E была точкой прикосновения непустого множества $A \subset E$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность точек из A, сходящаяся к x.*

Мы уже знаем, что это условие *достаточно* (гл. I, 2-е изд., § 6, n° 3; 3-е изд., § 7, n° 2). Чтобы убедиться в его *необходимости*, рассмотрим счетную фундаментальную систему (V_n) окрестностей точки x такую, что $V_{n+1} \subset V_n$ для всех n. Если x — точка прикосновения множества A, то каждое множество $V_n \cap A$ не пусто; беря по точке $x_n \in V_n \cap A$ для каждого n, получим последовательность (x_n), сходящуюся к x **).

Предложение 8 влечет следующее

Предложение 9. *Для того чтобы метрическое пространство E было полным, необходимо и достаточно, чтобы всякая последовательность Коши в E сходилась.*

В самом деле, пусть $\hat{E}$ — пополнение пространства E; если существует точка $x \in \hat{E}$, не принадлежащая E, то существует последовательность (x_n) точек из E, сходящаяся к x; это и будет не сходящейся последовательностью Коши в E.

Предложение 10. *Пусть E — метризуемое пространство и f — его отображение в топологическое пространство E'. Для того чтобы f было непрерывно в точке $a \in E$, необходимо и доста-*

*) См., например, J. Dieudonné, *Notes de Tératopologie* (I), *Revue scientifique* (Revue rose), 1939, стр. 39.

**) Это предложение может оставаться еще в силе для некоторых пространств, в которых по крайней мере одна точка не обладает счетной фундаментальной системой окрестностей, например для пространства, полученного компактификацией несчетного дискретного пространства посредством присоединения бесконечно удаленной точки (гл. I, 2-е изд., § 10, теорема 4; 3-е изд., § 9, теорема 4).

точно, чтобы для каждой последовательности (x_n) точек из E, сходящейся к a, последовательность $(f(x_n))$ сходилась к $f(a)$ в E'.

Необходимость условия уже известна (гл. I, 2-е изд., § 6, следствие 1 предложения 9; 3-е изд., § 7, следствие 1 предложения 9). Чтобы убедиться в его достаточности, рассмотрим фильтр $\mathfrak{B}'$ окрестностей точки $f(a)$ в E'; из условия вытекает, что $f^{-1}(\mathfrak{B}')$ мажорируется всяким элементарным фильтром, ассоциированным с некоторой последовательностью, сходящейся к a, т. е. всяким элементарным фильтром, сходящимся к a; но пересечение этих последних есть фильтр окрестностей точки a (гл. I, 2-е изд., § 5, предложение 10; 3-е изд., § 6, предложение 11), и предложение доказано.

Отметим, что предложения 8 и 10 справедливы также для всякого топологического пространства E, каждая точка которого обладает счетной фундаментальной системой окрестностей.

7. *Полунепрерывные функции на метризуемом пространстве*

Предложение 11. *Пусть E — метризуемое пространство, f — полунепрерывная снизу функция на E со значениями в замкнутом интервале $[a, b] \subset \overline{\mathbf{R}}$; тогда f есть верхняя огибающая возрастающей последовательности непрерывных функций на E со значениями в $[a, b[$.*

Применив перенос структуры, можно считать, что $a = 0$, $b = 1$.

1° Предположим сначала, что $f = \varphi_A$, где A — открытое множество в E, а φ_A — его характеристическая функция. Тогда функция g_n, определенная равенством $g_n(x) = (n-1)\inf(d(x, E-A), 1/n)$, непрерывна и $\geqslant 0$ на E. При этом $g_n(x) = f(x) = 0$ при $x \in E - A$ и $g_n(x) = f_n(x) - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$, когда $d(x, E-A) \geqslant 1/n$. Отсюда сразу следует, что $f = \sup_n g_n$; при этом $g_n(x) \leqslant (n-1)/n < 1$ для всех x и n.

2° В общем случае рассмотрим для каждого целого $n \geqslant 1$ убывающую конечную последовательность открытых множеств

$A_k = f^{-1}\left(\left]\frac{k}{n}, +\infty\right[\right)$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$. При каждом n функция $g_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \varphi_{A_k}$ полунепрерывна снизу и $0 \leqslant f(x) - g_n(x) \leqslant 1/n$; следовательно, f является верхней огибающей последовательности (g_n). С другой стороны, по 1°, g_n, будучи линейной комбинацией с коэффициентами $\geqslant 0$ конечного числа характеристических функций открытых множеств, есть верхняя огибающая счетного множества $(h_{mn})_{m \geqslant 0}$ непрерывных функций $\geqslant 0$; отсюда $f = \sup_{m,\,n} h_{mn}$. Полагая $f_n = \sup_{p \leqslant n,\, q \leqslant n} h_{pq}$, видим, что (f_n) есть возрастающая последовательность непрерывных функций $\geqslant 0$, имеющая своей верхней огибающей функцию f; при этом функции f_n не принимают значения 1, поскольку $g_n \leqslant (n-1)/n$.

8. *Метризуемые пространства счетного типа*

Определение 4. *Метризуемое пространство, топология которого обладает счетным базисом, называют метризуемым пространством счетного типа.*

Ясно, что всякое подпространство метризуемого пространства счетного типа также есть пространство счетного типа. Из определения базиса топологии произведения пространств (гл. I, 2-е изд., § 8, n° 1; 3-е изд., § 4, n° 1) и следствия 2 теоремы 1 вытекает, что всякое произведение *счетного* семейства метризуемых пространств счетного типа есть метризуемое пространство счетного типа. Также всякая сумма *счетного* семейства метризуемых пространств счетного типа есть метризуемое пространство счетного типа (n° 5).

Предложение 12. *Для метризуемого топологического пространства E следующие утверждения равносильны:*

а) *E — счетного типа;*

б) *в E существует всюду плотное счетное множество;*

в) *E гомеоморфно подпространству куба $I^{\mathbf{N}}$, где I — интервал $]0, 1[$ в $\mathbf{R}$.*

Из предыдущих замечаний ясно, что в) влечет а); а) влечет б), ибо если (U_n) — счетный базис топологии пространства E и a_n — точка из U_n, то множество точек a_n всюду плотно в E. Покажем, наконец, что б) влечет в). Пусть (a_n) — всюду плотная последова-

тельность точек в E и $\varphi(x)$ для каждого $x \in E$ — точка $(d(x, a_n))_{n\in\mathbf{N}}$ из $I^{\mathbf{N}}$ (где d — расстояние, согласующееся с топологией пространства E, при котором диаметр последнего $\leqslant 1$); покажем, что φ есть гомеоморфизм E на подпространство пространства $I^{\mathbf{N}}$. В самом деле, φ непрерывно, поскольку непрерывна каждая из функций $x \mapsto d(x, a_n)$; кроме того, φ инъективно, ибо каждая точка из E есть предел некоторой подпоследовательности последовательности (a_n) (предложение 8). Пусть B — шар в E с центром x_0 и радиусом r, а n — целое число, для которого $d(x_0, a_n) < r/3$. Образ относительно φ множества W тех точек $x \in E$, для которых

$$|\, d(x_0, a_n) - d(x, a_n) \,| < r/3,$$

есть по определению окрестность точки $\varphi(x_0)$ в $\varphi(E)$. Но для каждого $x \in W$ имеем $d(x, a_n) < d(x_0, a_n) + \frac{r}{3} < \frac{2r}{3}$, откуда

$$d(x, x_0) \leqslant d(x_0, a_n) + d(x, a_n) < r.$$

Это показывает, что W есть окрестность точки x_0, содержащаяся в B; тем самым φ есть гомеоморфизм E на $\varphi(E)$.

Заметим, что для произвольного топологического пространства E свойство б) не обязательно влечет существование счетного базиса, даже если E компактно и всякая его точка обладает счетной фундаментальной системой окрестностей (упражнение 13; см. гл. I, 2-е изд., § 2, упражнение 7; 3-е изд., § 1, упражнение 7).

Предложение 13. *Пусть E — топологическое пространство, обладающее счетным базисом (U_n); для каждого открытого покрытия $(V_\iota)_{\iota\in I}$ пространства E существует счетное множество $J \subset I$ такое, что $(V_\iota)_{\iota\in J}$ является покрытием E.*

В самом деле, пусть H — подмножество множества $\mathbf{N}$, состоящее из тех индексов n, для которых U_n содержится по крайней мере в одном из V_ι; последовательность $(U_n)_{n\in H}$ образует покрытие пространства E, ибо всякая точка $x \in E$ принадлежит какому-либо V_ι, а поскольку V_ι открыто, существует индекс n такой, что $x \in U_n \subset V_\iota$. Таким образом, существует отображение ψ множества H в I такое, что $U_n \subset V_{\psi(n)}$ для каждого $n \in H$; полагая $J = \psi(H)$, получим требуемое счетное подмножество.

9. Компактные метрические пространства; компактные метризуемые пространства

Критерий предкомпактности равномерных пространств (гл. II, 2-е изд., § 4, теорема 4; 3-е изд., § 4, теорема 3) дает для метрических пространств следующее предложение:

Предложение 14. *Для того чтобы метрическое пространство E было предкомпактно, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало конечное покрытие пространства E множествами, диаметры которых $\leqslant \varepsilon$.*

Присоединив предположение, что E *полно*, получим критерий *компактности* метрических пространств.

Из предложения 14 вытекает *топологический* критерий компактности, применимый к метризуемым пространствам:

Предложение 15. *Для того чтобы метризуемое топологическое пространство E было компактно, необходимо и достаточно, чтобы всякая бесконечная последовательность его точек имела в E предельную точку.*

В силу аксиомы (C) (гл. I, 2-е изд., § 10, n° 1; 3-е изд., § 9, n° 1) условие *необходимо*. Чтобы убедиться в его *достаточности*, рассмотрим на E расстояние d, согласующееся с его топологией. Покажем сначала, что так определенное метрическое пространство *полно*; в самом деле, всякая последовательность Коши в E имеет тогда предельную точку и потому сходится (гл. II, 2-е изд., § 3, предложение 4; 3-е изд., § 3, следствие 2 предложения 5); предложение 9 показывает поэтому, что E полно. Покажем, что E, кроме того, *предкомпактно*; действительно, в противном случае в силу предложения 14 существовало бы число $\alpha > 0$ такое, что E не обладало бы конечным покрытием, диаметры всех множеств которого $\leqslant \alpha$. Тогда индукцией по n можно было бы получить бесконечную последовательность (x_n) точек из E такую, что $d(x_p, x_n) > \alpha$ для всех n и $p < n$; но такая последовательность не может обладать предельной точкой, поскольку каждый шар радиуса $< \alpha/2$ содержит не более одной ее точки.

Следствие. *Для того чтобы множество A в метризуемом топологическом пространстве E было относительно компактно,*

необходимо и достаточно, чтобы всякая бесконечная последовательность точек этого множества имела в E предельную точку.

В самом деле, пусть d — расстояние, согласующееся с топологией пространства E. Применяя критерий предложения 15, покажем, что пространство $\overline{A}$ компактно: пусть (x_n) — последовательность точек из $\overline{A}$; для каждого индекса n существует $y_n \in A$ такое, что $d(x_n, y_n) < 1/n$; в силу предположения последовательность (y_n) имеет предельную точку $a \in E$, и a будет также предельной точкой для последовательности (x_n), ибо если y_m принадлежит шару с центром a и радиусом $1/n$ для некоторого $m > n$, то x_m принадлежит шару с центром a и радиусом $2/n$.

Следует заметить, что предложение 15 не является следствием существования счетной фундаментальной системы окрестностей у каждой точки из E; можно привести примеры неметризуемых и некомпактных пространств, в которых всякая точка обладает счетной фундаментальной системой окрестностей и всякая последовательность точек имеет предельную точку (упражнение 15).

Предложение 16. *Для того чтобы компактное пространство E было метризуемо, необходимо и достаточно, чтобы его топология обладала счетным базисом.*

Условие *необходимо*. В самом деле, согласно предложению 14 для каждого целого $n \geqslant 1$ существует конечное множество $A_n \subset E$, расстояние до которого от любой точки из E не превышает $1/n$; следовательно, счетное множество $A = \bigcup_n A_n$ всюду плотно в E, откуда и вытекает наше утверждение (предложение 12).

Условие *достаточно*. В самом деле, пусть (U_n) — счетный базис топологии пространства E. Тогда всякая окрестность точки диагонали Δ произведения $E \times E$ содержит окрестность вида $U_n \times U_n$; применяя аксиому Бореля — Лебега к компактному множеству Δ в $E \times E$, заключаем, что всякая окрестность диагонали Δ содержит окрестность Δ, являющуюся объединением конечного числа множеств вида $U_n \times U_n$. Таким образом, окрестности диагонали Δ, являющиеся объединениями конечного числа множеств вида $U_n \times U_n$, образуют фундаментальную систему окружений равномерной структуры пространства E (гл. II, § 4, теорема 1); следовательно, наше утверждение вытекает из теоремы 1.

Следствие. *Пусть E — локально компактное пространство и E' — компактное пространство, полученное присоединением к E бесконечно удаленной точки ω* (гл. I, 2-е изд., § 10, n° 8; 3-е изд., § 9, n° 8). *Следующие предложения равносильны:*

а) *топология пространства E обладает счетным базисом;*

б) *E' метризуемо;*

в) *E метризуемо и счетно в бесконечности.*

Покажем сначала, что а) влечет б). Пусть (U_n) — счетный базис топологии пространства E; всякая окрестность точки x в E содержит компактную окрестность, которая в свою очередь содержит в качестве окрестности точки x одно из множеств U_n; следовательно, эти U_n, являющиеся относительно компактными, тоже образуют базис топологии пространства E, так что можно считать все U_n относительно компактными. Таким образом, пространство E является объединением счетного семейства компактных множеств $\overline{U}_n$, т. е. счетно в бесконечности; это влечет, что точка ω в E' обладает счетной фундаментальной системой (V_n) открытых окрестностей (гл. I, 2-е изд., § 10, следствие предложения 19; 3-е изд., § 9, следствие 2 предложения 15); тогда ясно, что всякая окрестность точки $y \in E'$ содержит либо одно из U_n, либо одно из V_n, являющееся окрестностью y; другими словами, U_n и V_n образуют счетный базис топологии пространства E', и наше утверждение вытекает из предложения 16. Очевидно, б) влечет в), ибо б) включает, что ω обладает счетной фундаментальной системой окрестностей (гл. I, 2-е изд., § 10, следствие предложения 19; 3-е изд., § 9, следствие 2 предложения 15).

Докажем, наконец, что в) влечет а). По предположению, существует возрастающая последовательность (V_n) относительно компактных открытых множеств, образующих открытое покрытие пространства E и таких, что $\overline{V}_n \subset V_{n+1}$ (гл. I, 2-е изд., § 10, предложение 19; 3-е изд., § 9, предложение 15). Подпространство $\overline{V}_n$, будучи компактным и метризуемым, обладает счетным базисом (предложение 16), а следовательно, то же верно для V_n; пусть $(U_{mn})_{m \geqslant 1}$ — базис топологии пространства V_n. Для каждой точки $x \in E$ и каждой ее окрестности W существует n такое, что $x \in V_n$, и, значит, m такое, что $x \in U_{mn} \subset V_n \cap W$; значит U_{mn} ($m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$) образуют базис топологии пространства E.

10. *Факторпространства метризуемых пространств*

Факторпространство E/R метризуемого пространства E по отношению эквивалентности R в E не обязательно метризуемо (даже если, кроме того, E локально компактно °и E/R нормально$_{\circ}$). Однако:

Предложение 17. *Всякое отделимое факторпространство метризуемого компактного пространства есть метризуемое компактное пространство.*

Это же можно выразить, сказав, что если f — непрерывное отображение метризуемого компактного пространства E в отделимое пространство E', то $f(E)$ *есть метризуемое подпространство пространства* E' (гл. I, 2-е изд., § 10, следствие 1 предложения 8; 3-е изд., § 9, следствие 4 теоремы 2).

Пусть E — метризуемое компактное пространство и R — отношение эквивалентности в E такое, что E/R отделимо. Тогда, как известно (гл. I, § 10, предложение 8), E/R компактно; по предложению 16 остается доказать, что топология пространства E/R обладает счетным базисом. Для этого мы воспользуемся *замкнутостью* R (гл. I, § 10, предложение 8) и компактностью классов mod R. Пусть φ — каноническое отображение E на E/R и (U_n) — счетный базис топологии пространства E. Пусть далее z — произвольная точка из E/R и V — ее окрестность в E/R; тогда $\overset{-1}{\varphi}(V)$ будет окрестностью компактного множества $\overset{-1}{\varphi}(z)$ в E. Поскольку для каждого $x \in \overset{-1}{\varphi}(z)$ существует U_n, содержащее x и содержащееся в $\overset{-1}{\varphi}(V)$, из аксиомы Бореля — Лебега вытекает существование конечного открытого покрытия $(U_{n_k})_{1 \leqslant k \leqslant r}$ множества $\overset{-1}{\varphi}(z)$ такого, что $W = \bigcup_k U_{n_k}$ является окрестностью этого множества, содержащейся в $\overset{-1}{\varphi}(V)$. Так как R замкнуто, то $\varphi(W)$ будет тогда окрестностью точки z в E/R, содержащейся в V (гл. I, 2-е изд., § 9, предложение 7; 3-е изд., § 5, предложение 10). Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество внутренностей множеств вида $\varphi(W)$, где W

пробегает множество $\mathfrak{F}$ объединений всевозможных конечных семейств множеств U_n; из сказанного выше следует, что $\mathfrak{B}$ есть базис топологии пространства E/R, а так как $\mathfrak{F}$ счетно, то $\mathfrak{B}$ — счетный базис.

Предложение 18. *Пусть E — полное метрическое пространство, R — открытое отношение эквивалентности в E такое, что E/R отделимо, и φ — каноническое отображение E на E/R. Для каждого компактного множества K в E/R существует компактное множество K' в E такое, что $\varphi(K') = K$.*

Пусть $\mathfrak{B}_1$ — множество всех открытых шаров радиуса $1/2$ в E. Множества $\varphi(B)$, где B пробегает $\mathfrak{B}_1$, образуют открытое покрытие множества K, так что в E существует конечное число точек $x_1, \ldots, x_m$ таких, что образы относительно φ открытых шаров радиуса $1/2$ с центрами x_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ образуют открытое покрытие множества K.

Положим $H_1 = \{x_1, \ldots, x_{n_1}\}$ и предположим, что для каждого целого i, удовлетворяющего неравенствам $1 < i \leqslant n$, определено конечное множество H_i так, что:

1° $H_i \subset H_{i+1}$ и каждая точка из H_{i+1} находится от H_i на расстоянии $< 1/2^i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$;

2° образы относительно φ открытых шаров радиуса $1/2^i$, центры которых пробегают H_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, образуют открытое покрытие множества K.

Обозначим тогда через $\mathfrak{B}_{n+1}$ множество всех открытых шаров радиуса $1/2^{n+1}$ с центром x таким, что $d(x, H_n) < 1/2^n$; из свойств множества H_n вытекает, что множества $\varphi(B)$, где B пробегает $\mathfrak{B}_{n+1}$, образуют открытое покрытие множества K; следовательно, существует конечное множество $L_{n+1} \subset E$ такое, что образы относительно φ открытых шаров радиуса $1/2^{n+1}$, центры которых пробегают L_{n+1}, образуют открытое покрытие множества K; полагая $H_{n+1} = H_n \cup L_{n+1}$, видим, что по индукции можно определить бесконечную последовательность (H_n) множеств из E, обладающих приведенными выше свойствами 1° и 2°. Положим $H = \bigcup_n H_n$ и покажем, что H *предкомпактно*; в самом деле, для каждого $p > 0$ и каждой точки $z_{n+p} \in H_{n+p}$ существует такая последователь-

ность точек $z_{n+i} \in H_{n+i}$ $(0 \leqslant i \leqslant p-1)$, что $d(z_{n+i}, z_{n+i+1}) < \frac{1}{2^{n+i}}$ $(0 \leqslant i \leqslant p-1)$; отсюда вытекает, что $d(z_n, z_{n+p}) \leqslant \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{2^{n+i}} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$, и потому $d(y, H_n) \leqslant 1/2^{n-1}$ для каждого $y \in H$, чем и доказано наше утверждение. Так как E полно, то $\overline{H}$ компактно и, следовательно, $\varphi(\overline{H})$ компактно. Покажем, что $K \subset \varphi(\overline{H})$; пусть $z \in K$; по определению $d(H_n, \overset{-1}{\varphi}(z)) \leqslant 1/2^n$ для каждого n, откуда $d(\overline{H}, \overset{-1}{\varphi}(z)) = 0$; поскольку $\overset{-1}{\varphi}(z)$ замкнуто, а $\overline{H}$ компактно, отсюда следует, что $\overline{H} \cap \overset{-1}{\varphi}(z) \neq \varnothing$ (n° 2, замечание после предложения 3), чем наше утверждение и доказано. Пусть теперь $K' = \overline{H} \cap \overset{-1}{\varphi}(K)$; тогда K' замкнуто в $\overline{H}$, следовательно, компактно, и $\varphi(K') = K$.

Упражнения

1) Пусть E — отделимое равномерное пространство, (f_ι) — семейство отклонений на E, определяющее его равномерную структуру, и E_ι — метрическое пространство, ассоциированное с равномерным пространством, получаемым при наделении E равномерной структурой, определяемой одним отклонением f_ι (n° 1). Показать, что E изоморфно подпространству равномерного пространства $\prod_\iota E_\iota$.

2) Показать, что в связном метрическом пространстве E, у которого расстояние не ограниченно на $E \times E$, ни одна сфера не пуста.

*3) а) Пусть E — компактное метрическое пространство; если в E замыканием всякого открытого шара служит замкнутый шар того же радиуса с тем же центром, то всякий шар в E есть связное множество. [Показать, что если x, y — точки из E и S — замкнутый шар с центром x и радиусом $d(x, y)$, то для каждого $\varepsilon > 0$ множество $A_{y,\varepsilon}$ точек из S, соединимых с y V_ε-цепью, содержащейся в S (гл. II, § 4, n° 4), содержит все точки z, для которых $d(x, z) < d(x, y)$. Рассуждая от противного и используя теорему Вейерштрасса (гл. IV, § 6, теорема 1), вывести отсюда, что $x \in A_{y,\varepsilon}$ для всех $\varepsilon > 0$.]

б) Пусть E — компактное подпространство пространства $F = \mathbf{R}^2$, наделенного расстоянием $d(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$, образованное всеми точками (x_1, x_2), у которых $x_1 = 0$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 1$ или $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$, $x_2 = 0$. Показать, что всякий шар в E связен, но замыканием открытого шара не обязательно служит замкнутый шар с тем же центром и тем же радиусом.

4) Метрическое пространство E называют *ультраметрическим*, если расстояние в нем удовлетворяет для всех x, y, z неравенству

$$d(x, y) \leqslant \sup(d(x, z), d(y, z))$$

влекущему неравенство треугольника) (см. § 6, упражнение 2).

а) Показать, что если $d(x, z) \neq d(y, z)$, то

$$d(x, y) = \sup(d(x, z), d(y, z)).$$

б) Пусть $V_r(x)$ — открытый шар с центром x и радиусом r; показать, что $V_r(x)$ есть открыто-замкнутое множество в E (так что E — *вполне несвязно*) и что $V_r(y) = V_r(x)$ для всех $y \in V_r(x)$.

в) Показать, что замкнутый шар $W_r(x)$ с центром x и радиусом r является открыто-замкнутым множеством в E и что $W_r(y) = W_r(x)$ для всех $y \in W_r(x)$. Различные открытые шары радиуса r, содержащиеся в $W_r(x)$, образуют его *разбиение*, причем расстояние между любыми двумя из них равно r.

г) Если два (открытых или замкнутых) шара в E имеют общую точку, то один из них содержится в другом.

д) Для того чтобы последовательность (x_n) точек из E была последовательностью Коши, необходимо и достаточно, чтобы $d(x_n, x_{n+1})$ стремилось к 0 при неограниченном возрастании n.

е) Показать, что если E компактно, то для любого $x_0 \in E$ значения $d(x_0, x)$ на E образуют конечное или счетно бесконечное подмножество множества $[0, +\infty]$, все точки которого, за исключением, может быть, точки 0, *изолированные*. [Для каждого значения r, принимаемого расстоянием $d(x_0, x)$, рассмотреть верхнюю грань значений $d(x_0, x)$ на множестве точек x, для которых $d(x_0, x) < r$, и нижнюю грань на множестве точек x, для которых $d(x_0, x) > r$.]

5) Пусть E — метрическое пространство и d — его расстояние. Для каждой пары (x, y) точек из E обозначим через $d_0(x, y)$ нижнюю грань чисел $\alpha > 0$ таких, что x и y соединимы V_α-цепью (гл. II, § 4, № 4). Показать, что d_0 — отклонение на E и что метрическое пространство, ассоциированное с равномерным пространством, определяемым этим отклонением (№ 1), — ультраметрическое (упражнение 4).

*6) Пусть E — метрическое пространство; для каждых двух непустых его подмножеств A и B положим

$$\rho(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) \quad \text{и} \quad \sigma(A, B) = \sup(\rho(A, B), \rho(B, A));$$

положим, кроме того, $\sigma(\varnothing, \varnothing) = 0$ и $\sigma(\varnothing, A) = \sigma(A, \varnothing) = +\infty$ для каждого непустого множества $A \subset E$. Показать, что σ есть отклонение на множестве $\mathfrak{P}(E)$ всех подмножеств множества E и что определяемая им равномерная структура совпадает с получаемой из равномерной структуры пространства E способом, описанным в упражнении 7 § 2 главы II (3-е изд., гл. II, § 1, упражнение 5).

Предположим, что E *ограниченно*. На множестве $\mathfrak{F}(E)$ всех непустых замкнутых подмножеств пространства E σ является *расстоянием*.

Показать, что если, кроме того, E *полно*, то $\mathfrak{F}(E)$ — *полное* метрическое пространство. [Пусть Φ — фильтр Коши в $\mathfrak{F}(E)$ и $S(\mathfrak{X})$ для каждого множества $\mathfrak{X} \in \Phi$ есть объединение всех множеств X, принадлежащих $\mathfrak{X}$; показать, что множества $S(\mathfrak{X})$ образуют базис фильтра в E, что этот базис фильтра имеет непустое множество A точек прикосновения и что Φ сходится к A.]

*7) Пусть E — бесконечное дискретное пространство. Показать, что равномерная структура конечных разбиений (гл. II, 2-е изд., § 1, n° 2; 3-е изд., § 2, n° 2) в E, согласующаяся с топологией пространства E, не метризуема. [В противном случае существовала бы последовательность $(\mathfrak{S}_n)$ конечных разбиений пространства E такая, что всякое его конечное разбиение состояло бы из множеств, каждое из которых было бы объединением множеств одного из разбиений $\mathfrak{S}_n$; вывести отсюда, что тогда множество всех конечных разбиений пространства E было бы счетно.]

8) Пусть (E_ι) — несчетное семейство отделимых топологических пространств, каждое из которых содержит более одной точки. Показать, что ни одна точка пространства $\prod_\iota E_\iota$ не обладает счетной фундаментальной системой окрестностей.

9) Пусть E — топологическое пространство, каждая точка которого обладает счетной фундаментальной системой окрестностей.

а) Для того чтобы E было отделимо, достаточно, чтобы всякая сходящаяся последовательность в E имела единственный предел.

б) Если a — предельная точка бесконечной последовательности (x_n) точек из E, то существует подпоследовательность последовательности (x_n), сходящаяся к a.

в) Пусть A — непустое множество в E, $x_0 \in \bar{A}$ и f — отображение A в отделимое топологическое пространство E'. Для того чтобы $a \in E'$ было пределом f в точке x_0 относительно A, достаточно, чтобы для каждой последовательности (x_n) точек из A, сходящейся к x_0, последовательность $(f(x_n))$ сходилась к a.

г) В обозначениях пункта в), предположим дополнительно, что всякая точка из E' имеет счетную фундаментальную систему окрестностей. Тогда для всякой предельной точки $a \in E'$ функции f в точке x_0 относительно множества A существует последовательность (x_n) точек из A, сходящаяся к x_0 и такая, что $(f(x_n))$ сходится к a.

*10) Пусть E — компактное пространство. Если существует числовая функция f, определенная и непрерывная на $E \times E$ и обладающая тем свойством, что отношение $f(x, y) = 0$ *эквивалентно* отношению $x = y$, то E метризуемо. [Показать, что когда V пробегает фундаментальную систему окрестностей нуля в $\mathbf{R}$, множества $f^{-1}(V)$ образуют фундаментальную систему окрестностей диагонали Δ в $E \times E$.]

*11) Пусть E — метрическое компактное пространство и d — его расстояние. Показать, что отображение f пространства E в себя такое, что $d(f(x), f(y)) \geqslant d(x, y)$ для каждой пары x, y точек из E, является *изометрией E на E*. [Пусть a и b — произвольные две точки из E; положим $f^n = f^{n-1} \circ f$, $a_n = f^n(a)$, $b_n = f^n(b)$; выделяя из (a_n) и (b_n) надлежащие подпоследовательности, показать, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует индекс k такой, что $d(a, a_k) \leqslant \varepsilon$ и $d(b, b_k) \leqslant \varepsilon$; вывести отсюда, что $d(a_1, b_1) = d(a, b)$ и что $f(E)$ всюду плотно в E.]

*12) Пусть E — метризуемое компактное пространство.

а) Показать, что существует непрерывное отображение канторова множества K (гл. IV, § 2, п° 5) на E (см. гл. IV, § 8, упражнение 11).

б) Если, кроме того, E вполне несвязно и не имеет изолированных точек, то оно гомеоморфно K. [Рассуждать, как в упражнении 12 § 8 главы IV, используя то, что всякая окрестность точки $x \in E$ содержит открыто-замкнутую окрестность этой точки (гл. II, 2-е изд., § 4, следствие предложения 3; 3-е изд., § 4, следствие предложения 6).]

*13) а) Рассмотрим на множестве $\mathbf{R}$ всех вещественных чисел топологию $\mathscr{T}$, определенную следующим образом: пусть $U_y(x)$ для каждого $y > 0$ означает объединение интервалов $[x, x + y[$ и $]-x - y, -x[$; $\mathscr{T}$ есть топология, в которой фундаментальную систему окрестностей каждой точки x образуют множества $U_y(x)$, где y пробегает все числа >0. Пусть E — пространство, полученное наделением интервала $[-1, 1]$ топологией, индуцированной топологией $\mathscr{T}$.

Показать, что E компактно. [Если $x \in E$ есть точка прикосновения для фильтра $\mathfrak{F}$ в E в топологии числовой прямой, то x или $-x$ есть точка прикосновения для $\mathfrak{F}$ в топологии $\mathscr{T}$.]

б) Всякая точка в E обладает счетной фундаментальной системой окрестностей, и в E существует счетное всюду плотное множество, однако E не метризуемо. [Показать, что его топология не обладает счетным базисом.]

в) Пусть A — открытое множество в E; показать, что A есть объединение счетного семейства (I_n) открытых интервалов, содержащихся в $[0, 1]$, интервалов $-I_n$ и некоторого подмножества множества левых концов интервалов I_n и $-I_n$ и, может быть, точки $+1$. Вывести отсюда, что A есть объединение счетного семейства замкнутых множеств в E.

г) Пусть F — множество $I \times \{1, 2\}$, где I — интервал $[0, 1] \subset \mathbf{R}$; положим $E_i = I \times \{i\}$ $(i = 1, 2)$ и обозначим через f биекцию $(x, 1) \longmapsto (x, 2)$ множества E_1 на E_2. Пусть $\mathfrak{B}((x, 2))$ для каждого $x \in I$ означает множество подмножеств, сводящееся к $\{(x, 2)\}$, а $\mathfrak{B}((x, 1))$ — множество подмножеств вида $V_1 \cup (f(V_1) - \{(x, 2)\})$, где $V_1 = V \times \{1\}$, а V пробегает фундаментальную систему окрестностей x в I. Показать, что $\mathfrak{B}(y)$ для каждого $y \in F$ есть фундаментальная система окрестностей y для некоторой топологии в F. Наделенное этой топологией пространство F компактно, и всякая его точка обла-

дает счетной фундаментальной системой окрестностей, однако счетного всюду плотного множества в F не существует. Всякое замкнутое множество в F, содержащееся в E_2, конечно; вывести отсюда, что в F компактное множество E_1 не обладает счетной фундаментальной системой окрестностей. Отношение эквивалентности R в F, классами которого служат множество E_1 и точки множества $F - E_1$, замкнуто и всякий класс эквивалентности по R компактен, однако в F/R имеется точка, не обладающая счетной фундаментальной системой окрестностей. [См. § 4, упражнение 24а).]

14) а) Пусть E — достижимое топологическое пространство *) (3-е изд., гл. 1, § 8, упражнение 1). Доказать равносильность следующих свойств:

α) всякая последовательность точек в E имеет предельную точку;

β) всякое бесконечное дискретное подпространство пространства E не замкнуто;

γ) всякое счетное открытое покрытие пространства содержит его конечное покрытие;

δ) для всякого бесконечного открытого покрытия $\mathfrak{R}$ пространства E существует открытое покрытие $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}$ пространства E, отличное от $\mathfrak{R}$.

Отделимое топологическое пространство E, обладающее указанными свойствами, называется *полукомпактным*.

б) Для того чтобы последовательность точек полукомпактного пространства была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она имела единственную предельную точку.

в) Всякое замкнутое подпространство полукомпактного пространства полукомпактно. Обратно, если E отделимо и всякая его точка обладает счетной фундаментальной системой окрестностей, то всякое полукомпактное подпространство в E замкнуто.

г) Пусть f — непрерывное отображение полукомпактного пространства E в отделимое пространство E'; тогда образ $f(E)$ является полукомпактным подпространством пространства E'.

д) Пусть E — полукомпактное пространство, каждая точка которого обладает счетной фундаментальной системой окрестностей; тогда каждая последовательность точек в E обладает сходящейся подпоследовательностью.

е) Пусть (E_n) — конечная или счетно бесконечная последовательность топологических пространств, в каждом из которых всякая точка обладает счетной фундаментальной системой окрестностей. Для того чтобы пространство $\prod_n E_n$ было полукомпактно, необходимо и достаточно, чтобы каждое из пространств E_n было полукомпактно.

*) То есть каждое одноточечное множество в E замкнуто.— *Ред.*

[Использовать д) и упражнение 17 § 5 главы I 2-го изд. (3-е изд., гл. I, § 6, упражнение 16).]

ж) Полукомпактное пространство, в котором всякая точка обладает счетной фундаментальной системой окрестностей, регулярно.

з) Если полукомпактное пространство имеет *счетный базис*, то оно *компактно* и, следовательно, метризуемо.

и) На полукомпактном пространстве всякая полунепрерывная снизу числовая функция достигает своей нижней грани; в частности, всякое полукомпактное пространство вейерштрассово (§ 1, упражнение 22). [См. § 4, упражнение 26б).]

к) Показать, что свойство δ) пункта а) влечет свойство:

ζ) всякое точечно конечное (§ 4, n° 3) открытое покрытие пространства E содержит конечное покрытие.

[Рассуждать от противного.] Обратно, регулярное пространство, обладающее свойством ζ), полукомпактно. [Показать, что ζ) влечет тогда β).]

*15) Пусть $E = [a, b[$ — локально компактное пространство, определенное в упражнении 22 § 10 главы I 2-го изд. (3-е изд., гл. I, § 9, упражнение 12).

а) Для того чтобы множество в E было относительно компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным. Вывести отсюда, что E полукомпактно и, следовательно (упражнение 15), не метризуемо. [Заметить, что всякое счетное множество в E ограниченно.]

б) Показать, что всякая точка в E имеет метризуемую окрестность. [Использовать предложение 16.]

в) Всякие два некомпактных замкнутых множества A и B в E имеют непустое пересечение. [Образовать возрастающую последовательность точек, члены которой с четными номерами принадлежат A, а с нечетными принадлежат B.] Вывести отсюда, что всякая окрестность некомпактного замкнутого множества является дополнением относительно компактного множества. Показать, что множество A всех неизолированных точек пространства E замкнуто и не является пересечением никакого счетного семейства открытых множеств.

г) Обозначим через E' интервал $[a, b]$, наделенный следующей топологией: фундаментальную систему окрестностей каждого $x \in E$ образуют интервалы $]y, x]$, где y пробегает все элементы $< x$; фундаментальную систему окрестностей точки b образуют множества V_x $(x \in E)$, где V_x означает объединение b с множеством тех точек из $[x, b]$, которые имеют предшествующую точку (другими словами, являются *изолированными* в E). Показать, что E' полукомпактно, но *не регулярно* [см. упражнение 14ж)]; E, как подпространство пространства E', полукомпактно, но *не замкнуто*. [См. упражнение 14в).]

16) Пусть E и F — полукомпактные пространства. Доказать полукомпактность произведения $E \times F$ в каждом из следующих двух

случаев: 1° одно из пространств E, F компактно; 2° в одном из пространств E, F каждая точка обладает счетной фундаментальной системой окрестностей. [В первом случае, считая компактным, например, F, рассмотреть возрастающую последовательность (G_n) открытых множеств, объединением которых служит $E \times F$, и для каждого n — множество H_n тех точек $x \in E$, для которых $\{x\} \times F \subset G_n$; показать, что множества H_n открыты и $E = \bigcup_n H_n$.]

*17) Пусть E — компактификация Стоуна — Чеха дискретного пространства $\mathbf{N}$ (§ 1, упражнение 7).

а) Показать, что в E существуют полукомпактные подпространства A, B такие, что $A \cap B = \mathbf{N}$ и $A \cup B = E$. [Пусть $\aleph_\alpha = 2^{2^{\mathrm{Card}\,(\mathbf{N})}}$; в силу упражнения 12б) § 4 существует биекция $\xi \mapsto S_\xi$ ординального числа ω_α (Теор. множ., гл. III, § 6, упражнение 10) на множество счетно-бесконечных подмножеств множества E. Определить с помощью трансфинитной индукции два инъективных отображения $\xi \mapsto x_\xi$, $\xi \mapsto y_\xi$ ординального числа ω_α в $E - \mathbf{N}$ так, чтобы $x_\xi \in \overline{S}_\xi$, $y_\xi \in \overline{S}_\xi$ для каждого ξ и $P \cap Q = \varnothing$, $P \cup Q = E - \mathbf{N}$, где P (соответственно Q) — множество всех x_ξ (соответственно y_ξ); воспользоваться для этого упражнениями 12б) и 12в) § 4. Показать затем, что $A = P \cup \mathbf{N}$, $B = Q \cup \mathbf{N}$ отвечают поставленным требованиям.]

б) Показать, что произведение $A \times B$ не полукомпактно. [Заметить, что пересечение $A \times B$ с диагональю произведения $E \times E$ есть бесконечное дискретное замкнутое подпространство пространства $A \times B$.]

*18) Пусть E — метрическое пространство, в котором для каждого $x \in E$ существует открытый шар с центром x, обладающий, как подпространство пространства E, счетным базисом; пусть r_x — верхняя грань радиусов тех шаров с центром x, которые обладают этим свойством.

а) Показать (с помощью теоремы Цорна), что существует *максимальное* семейство (B_α) попарно непересекающихся открытых шаров в E таких, что если x_α — центр шара B_α, радиус этого шара $< r_{x_\alpha}$. Показать, что объединение шаров B_α всюду плотно в E; вывести отсюда, что в E существует всюду плотное множество M такое, что всякий открытый шар с произвольным центром $x \in E$ и радиусом $< r_x$ содержит не более чем *счетно-бесконечное* множество точек из M. [Заметить, что такой шар может пересекать только счетное множество попарно непересекающихся открытых множеств, и использовать предложение 12.]

б) Для каждой точки $x \in M$ обозначим через S_x открытый шар с центром в этой точке и радиусом $r_x/3$; показать, что шары S_x образуют покрытие пространства E и что каждая точка из E может при-

надлежать не более чем *счетному* множеству этих шаров. [Заметить, что если $y \in S_x$, то $d(x, y) \leqslant r_y/2$.]

в) Определим в E следующее отношение эквивалентности R между точками x, y: существует последовательность $(z_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ точек из M такая, что $x \in S_{z_1}$, $y \in S_{z_n}$ и $S_{z_i} \cap S_{z_{i+1}} \neq \varnothing$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$. Показать, что классы эквивалентности по R являются открыто-замкнутыми подпространствами в E, обладающими счетным базисом; другими словами, E есть *топологическая сумма* метрических пространств, обладающих счетным базисом (гл. I, 2-е изд., § 8, n° 10, 3-е изд., § 2, n° 4).

*19) В метрическом пространстве всякое относительно компактное множество ограниченно. Показать, что для того, чтобы метризуемое пространство E допускало расстояние, согласующееся с его топологией, при котором всякое ограниченное множество относительно компактно, необходимо и достаточно, чтобы E было локально компактно и обладало счетным базисом. [Чтобы убедиться в необходимости условия, показать, что если всякое ограниченное множество относительно компактно, то E локально компактно и счетно в бесконечности; для доказательства достаточности заметить, что E в силу следствия предложения 12 метризуемо; рассмотреть в E равномерную структуру, определенную отклонениями $d(x, y)$ и $|f(x) - f(y)|$, где d — расстояние, согласующееся с топологией пространства E, и f — функция, определенная в упражнении 15г) § 1.]

*20) а) Дать пример замкнутого отношения эквивалентности R в метризуемом локально компактном пространстве со счетным базисом так, чтобы E/R было паракомпактно, но содержало точку, не обладающую счетной фундаментальной системой окрестностей. [См. гл. I, 2-е изд., § 10, упражнение 14в); 3-е изд., § 10, упражнение 17.] (См. § 4, упражнение 24а).)

б) Пусть E — метризуемое пространство и R — замкнутое отношение эквивалентности в E. Показать, что если всякая точка из E/R обладает счетной фундаментальной системой окрестностей, то граница в E всякого класса эквивалентности по R компактна. [Предположив противное, показать, что тогда в E существовала бы последовательность, не имеющая предельных точек, члены которой попарно различны, а образ в E/R является последовательностью, сходящейся к пределу, отличному от всех ее членов.] Пусть C_z для каждой точки $z \in E/R$ — ее прообраз в E, F_z — граница C_z, если эта граница не пуста, или какое-нибудь одноточечное подмножество множества C_z, если C_z открыто-замкнуто, и F — подпространство пространства E, полученное объединением всех F_z $(z \in E/R)$; показать, что F/R_F гомеоморфно E/R.

*21) а) Пусть E — метризуемое пространство, d — согласующееся с его топологией ограниченное расстояние, σ — соответствующее d расстояние на множестве $\mathfrak{F}(E)$ всех непустых замкнутых подмножеств множества E (упражнение 6) и R — открыто-замкнутое отношение

эквивалентности в E; показать, что сужение σ на E/R есть расстояние, согласующееся с фактортопологией. [Воспользоваться упражнением 20б) для доказательства того, что всякий класс по R является открытым или компактным. Доказать затем, что если последовательность (z_n) точек из E/R стремится к точке a, а φ — каноническое отображение E на E/R, то $\sigma(\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(z_n))$ стремится к 0; рассуждать от противного, используя то, что R открыто.]

б) Пусть R — отношение эквивалентности в компактном интервале $I = [0, 1] \subset \mathbf{R}$, классами которого служат точки канторова множества K (гл. IV, § 2, n° 5), отличные от концов смежных интервалов, и замыкания этих интервалов. Показать, что факторпространство I/R гомеоморфно I [гл. IV, § 8, упражнение 16б)], но что на I/R расстояние σ не согласуется с топологией.

*22) Пусть E — отделимое топологическое пространство, обладающее счетным базисом (U_n), и R — отношение эквивалентности в E такое, что E/R отделимо и каждая точка из E/R обладает счетной фундаментальной системой окрестностей. Показать, что топология пространства E/R обладает счетным базисом. [Пусть φ — каноническое отображение E на E/R. Доказать, что внутренности объединений конечных семейств множеств $\varphi(U_n)$ образуют базис топологии пространства E/R. Для этого показать, что если V — окрестность точки $z \in E/R$, а (W_k) — последовательность множеств из (U_n), содержащихся в $\varphi^{-1}(V)$ и образующих покрытие прообраза $\varphi^{-1}(z)$ точки z, то существует конечное число индексов k таких, что объединение множеств $\varphi(W_k)$ служит окрестностью точки z. Предположив противное, образовать последовательность (y_n) попарно различных точек из E/R, стремящуюся к z и такую, что y_n не принадлежит объединению множеств $\varphi(W_k)$ для $k \leqslant n$; показать, что тогда объединение множеств $\varphi^{-1}(y_n)$ было бы замкнутым в E.]

Показать, что то же заключение справедливо, если предположить, что R замкнуто и все классы по R компактны (метод аналогичен).

*23) Топологическое пространство E называют *субметризуемым*, если его топология мажорирует топологию метризуемого пространства. Субметризуемое пространство отделимо, но не обязательно регулярно. [Гл. I, 2-е изд., § 6, упражнение 19; 3-е изд., § 8, упражнение 20.]

а) Для того чтобы вполне регулярное пространство E было субметризуемо, необходимо и достаточно, чтобы в E существовала равномерная структура, согласующаяся с его топологией, определяемая семейством отклонений Φ, содержащим по крайней мере одно расстояние d (см. § 1, упражнение 3). Обозначим тогда через $\hat{E}$ пополнение пространства E по этой равномерной структуре; пусть $\hat{d}$ — отклонение

на $\hat{E}$, получаемое продолжением d; показать, что для каждого $x \in \hat{E}$ существует не более одной точки $y \in E$ такой, что $\bar{d}(x, y) = 0$.

б) Показать, что если E — субметризуемое вполне регулярное пространство, то в E существует равномерная структура, согласующаяся с его топологией, такая, что E в ней полно. [Использовать а) и упражнение 16в) § 1.] Вывести отсюда, что если, кроме того, E — вейерштрассово (§ 1, упражнение 22), то оно компактно.

в) Показать, что паракомпактное и субметризуемое локально компактное пространство метризуемо. [Используя теорему 5 § 10 главы I 2-го изд. (3-е изд., гл. I, § 9, теорема 5), свести к случаю, когда E счетно в бесконечности; воспользоваться затем следствием предложения 16. См. также § 5, упражнение 15.]

*24) а) Пусть E — полное метрическое пространство и A — пересечение счетного семейства его открытых множеств. Показать, что на A существует расстояние, при котором A является полным метрическим пространством и которое определяет в A топологию, индуцируемую на E, и равномерную структуру, мажорирующую равномерную структуру, индуцируемую на E. [См. § 1, упражнения 16б) и в).]

б) Обратно, пусть E — метризуемое пространство и A — его подмножество, на котором существует расстояние d, согласующееся с топологией, индуцируемой из E, и превращающее A в полное метрическое пространство. Показать, что A есть пересечение счетного семейства открытых множеств из E. [Рассмотреть для каждого натурального числа n множество G_n точек $x \in \bar{A}$, обладающих открытой окрестностью U такой, что диаметр множества $A \cap U$ относительно d не превышает $1/n$.]

*25) Пусть E — метризуемое пространство, $\tilde{E}$ — его компактификация Стоуна — Чеха (§ 1, упражнение 7) и d — ограниченное расстояние, согласующееся с топологией пространства E. Обозначим для каждого $x \in E$ через $f_x(y)$ числовую функцию, получаемую продолжением функции $y \mapsto d(x, y)$ по непрерывности на $\tilde{E}$.

а) Показать, что $f_x(z) + f_y(z) \geqslant d(x, y)$ для всех $x \in E$, $y \in E$, $z \in \tilde{E}$. Показать, что $f_x(y) > 0$ для всех точек $y \in \tilde{E}$, отличных от $x \in E$.

б) Показать, что если E полно по расстоянию d, то E есть пересечение последовательности открытых множеств из $\tilde{E}$. [Рассмотреть в $\tilde{E}$ множество G_n точек y таких, что $f_x(y) < 1/n$ хотя бы для одного $x \in E$, и показать, используя а), что E есть пересечение множеств G_n.]

в) Показать, что и обратно, если E есть пересечение последовательности (G_n) открытых множеств из $\tilde{E}$, то на E существует согласующееся с топологией расстояние d', при котором E полно. [Рассматривая только тот случай, когда $E \neq \tilde{E}$, заметить, что $\tilde{E} - E$ является

объединением семейства компактных множеств $F_n = \widetilde{E} - G_n$; пусть $g(x) = \inf_{y \in F_n} f_x(y)$ для каждого n; используя в), показать, что $g_n(x) > 0$ на E и что g_n непрерывно на E. Закончить рассуждение, как в упражнении 16б) § 1.]

§ 3. Метризуемые группы; нормированные тела; нормированные пространства и алгебры

1. *Метризуемые топологические группы*

Предложение 1. *Для того чтобы правая и левая равномерные структуры топологической группы G были метризуемы, необходимо и достаточно, чтобы G была отделима и ее нейтральный элемент e обладал счетной фундаментальной системой окрестностей.*

Необходимость условия очевидна. Обратно, предполагая его выполненным, обозначим через (V_n) фундаментальную систему окрестностей e; пусть U_n — множество тех пар (x, y) из $G \times G$, для которых $x^{-1}y \in V_n$; множества U_n образуют счетную фундаментальную систему окружений левой равномерной структуры в G; будучи, кроме того, отделимой, эта структура метризуема (§ 2, теорема 1). Для правой равномерной структуры в G доказательство такое же.

Топологическая группа G называется *метризуемой*, если ее топология метризуема; предложение 1 показывает тогда, что обе ее равномерные структуры метризуемы.

Этот результат может быть уточнен с помощью следующего понятия:

Определение 1. *Расстояние d на мультипликативной группе G называют инвариантным слева* (соотв. *инвариантным справа*), *если $d(zx, zy) = d(x, y)$* (соотв. $d(xz, yz) = d(x, y)$) *для всех x, y, z из G.*

Предложение 2. *Левая* (соотв. *правая*) *равномерная структура метризуемой группы G может быть определена посредством расстояния, инвариантного слева* (соотв. *справа*).

В самом деле, предположим, что фундаментальная система (V_n) окрестностей e состоит из симметричных окрестностей таких, что $V_{n+1}^3 \subset V_n$ для всех n; соответствующие окружения U_n левой рав-

номерной структуры будут тогда симметричными окружениями такими, что $\overset{3}{U}_{n+1} \subset U_n$. Прием, использованный при доказательстве предложения 2 § 1, приводит, отправляясь от последовательности (U_n), к расстоянию d на G, согласующемуся с левой равномерной структурой группы G; кроме того, поскольку при любом $z \in G$ отображение $(x, y) \mapsto (zx, zy)$ оставляет неизменным каждое U_n, то же определение d показывает, что d есть расстояние, инвариантное слева. Для правой равномерной структуры рассуждение аналогично.

Отметим, что если правая и левая равномерные структуры в G различны, то d не инвариантно справа, и, следовательно, в общем случае $d(x^{-1}, y^{-1}) \neq d(x, y)$.

В частности, если G — метризуемая *коммутативная* группа, то ее равномерная структура определяется одним инвариантным расстоянием d; в аддитивной записи будем иметь $d(x, y) = d(0, y - x) = d(0, x - y)$; часто полагают $d(0, x) = |x|$ (или $d(0, x) = \|x\|$), так что $d(x, y) = |x - y|$. Функция $|x|$ удовлетворяет следующим трем условиям:

а) $|-x| = |x|$ для всех $x \in G$;
б) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ для всех $x, y \in G$;
в) Отношение $|x| = 0$ равносильно $x = 0$.

Обратно:

Предложение 3. *Пусть G — коммутативная группа в аддитивной записи и $x \mapsto |x|$ — отображение G в $\mathbf{R}_+$, удовлетворяющее предыдущим условиям* а), б), в). *Тогда функция $d(x, y) = |x - y|$ является инвариантным расстоянием на G; определяемая ею в G топология $\mathcal{T}$ согласуется со структурой группы, а определяемая ею равномерная структура совпадает с равномерной структурой топологической группы, получаемой при наделении G топологией $\mathcal{T}$.*

Функция $d(x, y)$ действительно является расстоянием на G, ибо $d(x, y) = 0$ равносильно $x = y$ в силу в), $d(y, x) = d(x, y)$ в силу а) и $d(x, y) = |(x - z) + (z - y)| \leqslant |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$ в силу б). Кроме того, d — инвариантное расстояние, поскольку $(x + z) - (y + z) = x - y$. Пусть V_α для каждого $\alpha > 0$ — множество тех $x \in G$, для которых

$|x| < \alpha$; множества V_α образуют фундаментальную систему $\mathfrak{S}$ окрестностей нуля в топологии $\mathscr{T}$, а так как d инвариантно, то $a + \mathfrak{S}$ для каждого $a \in G$ является фундаментальной системой окрестностей a в топологии $\mathscr{T}$. В силу а) множества V_α симметричны, а в силу б) $V_\alpha + V_\alpha \subset V_{2\alpha}$. Таким образом, топология $\mathscr{T}$ согласуется с заданной в G структурой группы (гл. III, § 1, n° 2). Последняя часть предложения очевидна.

Условия а), б), в) равносильны соединению условия в) с условием

б′) $$|x - y| \leqslant |x| + |y|.$$

В самом деле, очевидно, а) и б) влекут б′). Обратно, полагая в б′) $x = 0$ и принимая во внимание в), получаем $|-y| \leqslant |y|$, откуда, заменяя y на $-y$, имеем $|-y| = |y|$, т. е. а); заменяя в б′) y на $-y$, получаем тогда б).

Предложение 4. *Всякая отделимая факторгруппа G/H метризуемой группы G метризуема; если, кроме того, G полна, то и G/H полна* *).

Первая часть предложения вытекает из того, что в G/H нейтральный элемент обладает счетной фундаментальной системой окрестностей: в самом деле, если (V_n) — фундаментальная система окрестностей e в G, то канонические образы $\dot{V}_n$ множеств V_n в G/H образуют фундаментальную систему окрестностей нейтрального элемента в G/H (гл. III, 2-е изд., § 2, следствие теоремы 1; 3-е изд., § 2, предложение 17).

Чтобы показать, что если G полна, то и G/H полна, достаточно (§ 2, предложение 9) показать, что всякая последовательность Коши $(\dot{x}_n)$ относительно левой равномерной структуры в G/H сходится; при этом всегда можно считать (выделяя, если потребуется, подпоследовательность последовательности $(\dot{x}_n)$), что $\dot{x}_p^{-1}\dot{x}_q \in \dot{V}_n$, каковы бы ни были индексы p, q такие, что $p \geqslant n$, $q \geqslant n$; это означает, что для любой пары точек $y \in \dot{x}_p$, $z \in \dot{x}_q$ имеем $y^{-1}z \in HV_n = V_nH$, так что для любого $y \in \dot{x}_p$ пересечение $\dot{x}_q$

*) Существуют неметризуемые полные группы G, содержащие замкнутую подгруппу H, факторгруппа G/H по которой не полна. (Топ. вект. простр., гл. IV, § 4, упражнение 10в).)

с окрестностью yV_n точки y не пусто. Предположим теперь, что последовательность (V_n) выбрана так, что $V_{n+1}^2 \subset V_n$, и определим по индукции последовательность (x_n) точек из G так, чтобы $x_n \in \dot{x}_n$ и $x_{n+1} \subset x_n V_n$, что по предыдущему возможно; по индукции заключаем тогда, что $x_{n+p} \in x_n V_n V_{n+1} \cdots V_{n+p-1} \subset x_n V_{n-1}$ для всех $p > 0$. Таким образом, (x_n) есть последовательность Коши в G и, значит, сходится к некоторой точке a; отсюда сразу следует, что канонический образ $\dot{a}$ точки a в G/H есть предел последовательности $(\dot{x}_n)$.

Следствие 1. *Пусть G — полная метризуемая группа, G_0 — ее всюду плотная подгруппа, H_0 — замкнутый нормальный делитель последней и H — его замыкание в G; тогда пополнение факторгруппы G_0/H_0 изоморфно G/H.*

Как известно, H есть нормальный делитель группы G (гл. III, 2-е изд., § 2, предложение 7; 3-е изд., § 2, предложение 8), а предложение 4 показывает, что факторгруппа G/H полна; с другой стороны, ясно, что $\varphi(G_0)$, где φ — каноническое отображение G на G/H, всюду плотно в G/H. Поэтому справедливость следствия вытекает из следующей леммы:

Лемма 1. *Пусть G — топологическая группа, G_0 — ее всюду плотная подгруппа, H_0 — замкнутый нормальный делитель последней, H — его замыкание в G и φ — канонический гомоморфизм G на G/H; тогда каноническое отображение G_0/H_0 на $\varphi(G_0)$ есть изоморфизм структур топологической группы.*

Поскольку $H_0 = H \cap G_0$, все сводится к доказательству того, что открытое множество U_0 в G_0, насыщенное по отношению $x^{-1}y \in H_0$, является следом на G_0 некоторого открытого множества из G, насыщенного по отношению $x^{-1}y \in H$ (гл. I, 2-е изд., § 9, предложение 4; 3-е изд., § 3, предложение 10). Пусть U — открытое множество в G такое, что $U_0 = U \cap G_0$; поскольку $U_0 = U_0 H_0$, сразу видно, что $U_0 = UH_0 \cap G_0$; а так как UH_0 открыто в G, то можно предполагать, что $U = UH_0$. Тогда множество UH будет открыто в G и насыщено по отношению $x^{-1}y \in H$; покажем, что $UH \cap G_0 = U_0$, чем доказательство и завершится. Пусть $u \in U$ и $h \in H$ таковы, что $uh \in G_0$; существует симметричная окрестность V нейтрального элемента e в G такая, что $uV \subset U$;

поскольку Vh есть окрестность h в G, существует $z \in V$, для которого $zh \in H_0$; но тогда $uz^{-1} \in U$, и так как $uh = (uz^{-1})(zh)$, то можно предполагать, что $h \in H_0$; поскольку $UH_0 = U$, тогда $uh \in U_0$.

Пусть G и G' — отделимые коммутативные топологические группы, а $\hat{G}$ и $\hat{G}'$ — их пополнения. Напомним (гл. III, § 3), что всякое непрерывное представление u группы G в G' равномерно непрерывно и продолжается единственным образом до непрерывного представления $\hat{G}$ в $\hat{G}'$, которое мы будем далее в этом n° обозначать через $\hat{u}$. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{u} & G' \\ {\scriptstyle \iota}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota'} \\ \hat{G} & \xrightarrow{\hat{u}} & \hat{G}' \end{array},$$

где ι и ι' — канонические инъекции G в $\hat{G}$ и G' в $\hat{G}'$, коммутативна. Ясно, что если v — непрерывное представление группы G' в отделимую коммутативную топологическую группу G'' и $w = v \circ u$, то $\hat{w} = \hat{v} \circ \hat{u}$.

Пусть H — замкнутая подгруппа группы G, $E = G/H$, а j и p — канонические отображения

$$H \xrightarrow{j} G \xrightarrow{p} E.$$

Пусть далее $\overline{H}$ — замыкание H в $\hat{G}$; $\overline{H}$ — полная группа и потому отождествляется с пополнением $\hat{H}$ группы H. Непрерывное продолжение $\hat{j}$ отображения j на $\hat{H}$ есть, очевидно, каноническая инъекция $\hat{H}$ в $\hat{G}$.

Будем предполагать, начиная отсюда, что группа G метризуема. Тогда каноническое отображение факторгруппы $E = G/H$ в $\hat{G}/\hat{H}$ есть ее топологический изоморфизм на всюду плотную подгруппу полной группы $\hat{G}/\hat{H}$ (следствие 1), так что можно отождествить $\hat{G}/\hat{H}$ с $\hat{E}$ и непрерывное продолжение $\hat{p}$ отображения p на $\hat{G}$ с каноническим отображением $\hat{G}$ на $\hat{G}/\hat{H}$.

Следствие 2. *Пусть G и G' — метризуемые коммутативные топологические группы, u — гомоморфизм G в G', N — его*

ядро, а P — его образ. Тогда $\hat{u}$ есть гомоморфизм $\hat{G}$ в $\hat{G}'$ с ядром $\hat{N}$ и образом $\hat{P}$.

Пусть $u = j \circ v \circ p$ — каноническое разложение гомоморфизма u, где v — изоморфизм топологической группы G/N на топологическую группу $u(G) = P$. Имеем $\hat{u} = \hat{j} \circ \hat{v} \circ \hat{p}$ и, как мы видели, $\hat{p}$ есть каноническое отображение $\hat{G}$ на $\hat{G}/\hat{N}$, а $\hat{j}$ — каноническое отображение $\hat{P}$ в $\hat{G}'$. С другой стороны, $\hat{v}$ есть изоморфизм $\hat{G}/\hat{N}$ на $\hat{P}$ (гл. III, 2-е изд., § 3, предложение 6; 3-е изд., § 3, предложение 5), и следствие доказано.

Следствие 3. *Пусть G, G', G'' — метризуемые коммутативные топологические группы, $u\colon G \to G'$ и $v\colon G' \to G''$ — гомоморфизмы такие, что последовательность $G \xrightarrow{u} G' \xrightarrow{v} G''$ точна* (т. е. $u(G) = v^{-1}(0)$). *Тогда и последовательность $\hat{G} \xrightarrow{\hat{u}} \hat{G}' \xrightarrow{\hat{v}} \hat{G}''$ точна.*

В самом деле, пусть $N = u(G) = v^{-1}(0)$; из следствия 2 вытекает, что $\hat{N}$ есть одновременно образ $\hat{u}$ и ядро $\hat{v}$.

Замечания. 1) Пусть G — *неотделимая* топологическая группа такая, что ассоциированная с ней отделимая группа метризуема; то же можно выразить, сказав, что нейтральный элемент в G имеет счетную фундаментальную систему окрестностей. Доказательство предложения 4 переносится тогда без изменений на этот случай, с произвольным нормальным делителем группы G в качестве H; оно показывает, что отделимая группа, ассоциированная с G/H, метризуема и что G/N — полная группа (вообще говоря, неотделимая), коль скоро G полна.

2) Пусть d — инвариантное слева расстояние, определяющее топологию метризуемой группы G, и H — замкнутый нормальный делитель группы G. Для произвольных точек $\dot{x}$, $\dot{y}$ из G/H рассмотрим расстояние $d(\dot{x}, \dot{y})$ между замкнутыми множествами $\dot{x}$, $\dot{y}$ в G (§ 2, n° 2); покажем, что $d(\dot{x}, \dot{y})$ является *инвариантным слева расстоянием* на G/H, определяющим топологию этой факторгруппы. Заметим сначала, что если $x \in \dot{x}$, $y \in \dot{y}$, то $d(\dot{x}, \dot{y}) = d(x, Hy)$; в самом деле, $d(x, Hy) = \inf_{h \in H} d(x, hy)$, откуда в силу инвариантности слева расстояния d сразу следует, что $d(h'x, Hy) =$

$= d(x, Hy)$ для всех $h' \in H$, чем наше утверждение и доказано (§ 2, n° 2); таким образом, для любой точки $\dot{z} \in G/H$ имеем (§ 2, n° 2, формула (2))

$$| d(\dot{x}, \dot{z}) - d(\dot{y}, \dot{z}) | = | d(x, \dot{z}) - d(y, \dot{z}) | \leqslant d(x, y),$$

и так как это неравенство справедливо при любых $x \in \dot{x}$ и $y \in \dot{y}$, то $| d(\dot{x}, \dot{z}) - d(\dot{y}, \dot{z}) | \leqslant d(\dot{x}, \dot{y})$, чем доказано, что $d(\dot{x}, \dot{y})$ — расстояние на G/H. При этом, согласно предыдущему, для каждого $z \in \dot{z}$ имеем $d(\dot{zx}, \dot{zy}) = \inf_{h \in H} d(zx, hzy)$; но так как $hzy = z(z^{-1}hz)y$, а $z^{-1}hz$ пробегает H, когда h пробегает H (ибо H — нормальный делитель), то из инвариантности слева расстояния $d(x, y)$ вытекает, что $d(zx, Hzy) = d(x, Hy) = d(\dot{x}, \dot{y})$. Наконец, если V — окрестность e в G, определяемая неравенством $d(e, x) < \alpha$, то ее образом $\dot{V}$ в G/H служит множество, определяемое неравенством $d(\dot{e}, \dot{x}) < \alpha$, чем и завершается доказательство.

2. *Нормированные тела*

Определение 2. *Абсолютным значением на теле K называют отображение $x \mapsto | x |$ тела K в $\mathbf{R}_+$, удовлетворяющее следующим условиям:*

($\mathrm{VM_I}$) $| x | = 0$ *равносильно* $x = 0$;

($\mathrm{VM_{II}}$) $| xy | = | x | \, | y |$ *для всех* x, y *из* K;

($\mathrm{VM_{III}}$) $| x + y | \leqslant | x | + | y |$ *для всех* x, y *из* K.

Согласно ($\mathrm{VM_{II}}$), $| x | = | 1 | \, | x |$, и так как в силу ($\mathrm{VM_I}$) существует по крайней мере одно x, для которого $| x | \neq 0$, то $| 1 | = 1$; в силу ($\mathrm{VM_{II}}$) тогда $1 = | -1 |^2$, откуда также $| -1 | = 1$ и, следовательно,

$$| -x | = | -1 | \, | x | = | x |;$$

отсюда заключаем, что $| x - y | \leqslant | x | + | y |$ для всех x, y. Можно также сказать, что $d(x, y) = | x - y |$ есть *инвариантное расстояние* на аддитивной группе тела K, а отображение $x \mapsto | x |$ — *представление* мультипликативной группы K^* ненулевых элементов из K в мультипликативную группу $\mathbf{R}_+^*$ вещественных чисел > 0.

Инвариантное расстояние $|x-y|$ определяет в K топологию метрического пространства, согласующуюся со структурой аддитивной группы в K (предложение 3); кроме того, эта топология согласуется со *структурой тела* в K. В самом деле, непрерывность xy на $K \times K$ вытекает из соотношения

$$xy - x_0y_0 = (x-x_0)(y-y_0) + (x-x_0)y_0 + x_0(y-y_0),$$

которое дает

$$|xy - x_0y_0| \leqslant |x-x_0|\,|y-y_0| + |x-x_0|\,|y_0| + |x_0|\,|y-y_0|.$$

Точно так же непрерывность x^{-1} в каждой точке $x_0 \neq 0$ вытекает из тождества $x^{-1} - x_0^{-1} = x^{-1}(x_0 - x)x_0^{-1}$, которое на основании $(\mathrm{VM}_{\mathrm{II}})$ дает

$$|x^{-1} - x_0^{-1}| = \frac{|x-x_0|}{|x_0|\,|x|}.$$

Если $\varepsilon > 0$ взято $< |x_0|$, то отношение $|x-x_0| \leqslant \varepsilon$ влечет $|x| \geqslant |x_0| - \varepsilon$, откуда $|x^{-1} - x_0^{-1}| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{|x_0|(|x_0|-\varepsilon)}$, что и устанавливает непрерывность x^{-1} в точке x_0.

Определение 3. *Нормированным телом называют тело K, наделенное структурой, определяемой заданием на K абсолютного значения.*

Мы будем всегда считать нормированное тело наделенным топологией, определяемой его абсолютным значением, и тем самым — *топологическим* телом. Если K_0 — подтело нормированного тела K, то сужение на K_0 абсолютного значения, заданного на K, является абсолютным значением на K_0 и определяет в K_0 топологию, совпадающую с индуцированной из K.

Пример. 1) Пусть K — произвольное тело; для каждого $x \in K$ положим $|x| = 1$, если $x \neq 0$, и $|x| = 0$, если $x = 0$; так определенное отображение $x \longmapsto |x|$ является абсолютным значением на K, называемым *несобственным* абсолютным значением. Для того чтобы топология, определенная в K абсолютным значением $|x|$, была *дискретной*, необходимо и достаточно, чтобы $|x|$ было несобственным абсолютным значением. Достаточность этого условия очевидна. Обратно, если топология тела K дискретна, то $|x|$ не может принимать никаких значений $\alpha > 0$, отличных от 1; в самом деле, если бы $|x_0| = \alpha < 1$ для некоторого $x_0 \neq 0$, то последователь-

ность (x_0^n), члены которой $\neq 0$, сходилась бы к 0; случай $\alpha > 1$ сводится к предыдущему переходом к x_0^{-1}.

2) Абсолютное значение вещественного числа (гл. IV, § 1, n° 6) удовлетворяет аксиомам (VM_I), (VM_{II}), (VM_{III}) и определяет на поле $\mathbf{R}$ топологию числовой прямой. На поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел (отождествляемом с $\mathbf{R}^2$) и на теле $\mathbf{K}$ кватернионов (отождествляемом с $\mathbf{R}^4$) евклидова норма является вместе с тем абсолютным значением, определяющим топологию каждого из этих тел (гл. VIII, § 1, n°n° 2 и 4).

3) *Вещественным нормированием* на теле K называется функция v на K^* со значениями в $\mathbf{R}$, удовлетворяющая следующим условиям: а) $v(xy) = v(x) + v(y)$ для всех x, $y \in K^*$; б) $v(x+y) \geqslant \inf(v(x), v(y))$, если при этом $x + y \neq 0$. Пусть a — какое-либо вещественное число >1; тогда положив $|x| = a^{-v(x)}$ для всех $x \neq 0$ и $|0| = 0$, получим на K *абсолютное значение*. В самом деле, из соотношения $v(xy) = v(x) + v(y)$ при $x \neq 0$, $y \neq 0$ получаем для этих x, y соотношение $|xy| = |x|\,|y|$, и это соотношение тривиальным образом верно, если один из элементов x, y равен нулю; точно так же неравенство $v(x+y) \geqslant \inf(v(x), v(y))$ для $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x + y \neq 0$ влечет неравенства $|x+y| \leqslant \sup(|x|, |y|) \leqslant |x| + |y|$, и непосредственно проверяется, что эти неравенства остаются в силе, если какой-либо из элементов x, y, $x + y$ равен нулю. В частности, если $v_p(x)$ есть p-адическое нормирование на поле $\mathbf{Q}$ рациональных чисел (показатель степени, в которой p входит в разложение числа x на простые множители), то соответствующее абсолютное значение $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ называется *p-адическим абсолютным значением* на поле $\mathbf{Q}$.

Замечание. Если элемент x нормированного тела есть корень из единицы, то $|x| = 1$, ибо если $x^n = 1$ для целого $n > 0$, то $|x|^n = 1$ и, следовательно, $|x| = 1$. В частности, единственное абсолютное значение на *конечном* теле есть *несобственное* абсолютное значение, поскольку всякий ненулевой элемент тела есть корень из единицы.

Определение 4. *Два абсолютных значения на теле K называются эквивалентными, если они определяют в K одну и ту же топологию.*

Предложение 5. *Для того чтобы не несобственные абсолютные значения $|x|_1$ и $|x|_2$ на теле K были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы отношение $|x|_1 < 1$ влекло $|x|_2 < 1$. Тогда существует число $\rho > 0$ такое, что $|x|_2 = |x|_1^\rho$ для всех $x \in K$.*

Условие необходимо, ибо множество элементов $x \in K$, для которых $|x|_1 < 1$, совпадает с множеством тех x, для которых

$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ в топологии, определенной абсолютным значением $|x|_1$.

Обратно, предположим, что $|x|_1 < 1$ влечет $|x|_2 < 1$. Тогда $|x|_1 > 1$ влечет $|x|_2 > 1$, ибо $|x^{-1}|_1 < 1$ и, следовательно, $|x^{-1}|_2 < 1$. Так как, по предположению, абсолютное значение $|x|_1$ не является несобственным, то существует $x_0 \in K$, для которого $|x_0|_1 > 1$; положим $a = |x_0|_1$, $b = |x_0|_2$, $\rho = \log b/\log a > 0$. Пусть $x \in K^*$ и $|x|_1 = |x_0|_1^{\gamma}$. Если m и n — целые числа такие, что $n > 0$ и $m/n > \gamma$, то $|x|_1 < |x_0|_1^{m/n}$, откуда $|x^n/x_0^m|_1 < 1$ и, следовательно, $|x^n/x_0^m|_2 < 1$, $|x|_2 < |x_0|_2^{m/n}$. Так же покажем, что если $m/n < \gamma$, то $|x|_2 > |x_0|_2^{m/n}$. Следовательно, $|x|_2 = |x_0|_2^{\gamma}$; иначе говоря, $\log |x|_2 = \gamma \log b = \gamma\rho \log a = \rho \log |x|_1$ или $|x|_2 = |x|_1^{\rho}$; отсюда явствует тогда, что окрестности нуля в топологиях, определенных в K абсолютными значениями $|x|_1$ и $|x|_2$, совпадают.

Обратно, для любого абсолютного значения $|x|$ на K функция $|x|^{\rho}$ является абсолютным значением на K (эквивалентным $|x|$) при всяком ρ, удовлетворяющем неравенствам $0 < \rho \leqslant 1$. В самом деле, достаточно проверить неравенство $|x+y|^{\rho} \leqslant |x|^{\rho} + |y|^{\rho}$; но $|x+y|^{\rho} \leqslant (|x| + |y|)^{\rho}$, так что остается показать, что если $a > 0$, $b > 0$ и $0 < \rho \leqslant 1$, то $(a+b)^{\rho} \leqslant a^{\rho} + b^{\rho}$. Положив $c = a/(a+b)$, $d = b/(a+b)$, будем иметь $c + d = 1$ и требуемое неравенство перепишется в виде $1 \leqslant c^{\rho} + d^{\rho}$; последнее же непосредственно следует из соотношений $c^{\rho} \geqslant c$, $d^{\rho} \geqslant d$, очевидных, поскольку $0 < c \leqslant 1$, $0 < d \leqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$.

Отсюда вытекает, что множество тех значений $r > 0$, для которых $|x|^r$ — абсолютное значение, есть конечный или бесконечный интервал в $\mathbf{R}$ с началом 0; если он конечен, то, очевидно, содержит свой правый конец, ибо если для произвольных двух элементов x, y на K имеем $|x+y|^r \leqslant |x|^r + |y|^r$, когда $0 < r < r_0$, то по непрерывности неравенство остается в силе и при $r = r_0$. В случае, когда $|x|^r$ есть абсолютное значение при каждом $r > 0$, имеем

$$|x+y| \leqslant (|x|^r + |y|^r)^{1/r},$$

каковы бы ни были x, $y \in K$ и $r > 0$. Но если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то $\lim_{r\to\infty} (a^r + b^r)^{1/r} = \sup(a, b)$, ибо, предполагая, например, $b \leqslant a$, имеем

$$a \leqslant (a^r + b^r)^{1/r} \leqslant 2^{1/r} a,$$

откуда, неограниченно увеличивая r, и получаем требуемую формулу.

Таким образом, видим, что если $|x|^r$ есть абсолютное значение при каждом $r > 0$, то $|x + y| \leqslant \sup(|x|, |y|)$; то же можно выразить еще, сказав, что $v(x) = -\log|x|$ $(x \neq 0)$ является *нормированием* на K.

Замечание. Доказательство предложения 5 показывает, что если абсолютное значение $|x|_1$ не является несобственным и топология, определяемая в K абсолютным значением $|x|_2$, *мажорируется* топологией, которую определяет $|x|_1$, то $|x|_1$ и $|x_2|$ *эквивалентны*, поскольку неравенство $|x|_1 < 1$ влечет тогда $|x|_2 < 1$. Иначе говоря, топологии, определяемые в K двумя не несобственными абсолютными значениями, могут быть *сравнимы* только когда они *совпадают*.

Предложение 6. *Кольцо $\hat{K}$, получаемое пополнением тела K, нормированного посредством абсолютного значения $|x|$, является телом, а функция $|x|$ продолжается по непрерывности до абсолютного значения на $\hat{K}$, определяющего топологию последнего.*

Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр Коши в K (относительно аддитивной равномерной структуры тела K), для которого 0 не является точкой прикосновения; чтобы убедиться в том, что $\hat{K}$ — тело, достаточно установить, что образ $\mathfrak{F}$ при отображении $x \mapsto x^{-1}$ есть базис фильтра Коши (гл. III, 2-е изд., § 5, предложение 3; 3-е изд., § 6, предложение 7). Но, по предположению, существуют число $\alpha > 0$ и множество $A \in \mathfrak{F}$ такие, что $|x| \geqslant \alpha$ для всех $x \in A$; с другой стороны, для каждого $\varepsilon > 0$ существует множество $B \in \mathfrak{F}$ такое, что $B \subset A$ и $|x - y| \leqslant \varepsilon$ для всякой пары элементов x, y из B; отсюда

$$|x^{-1} - y^{-1}| = \frac{|x - y|}{|x|\,|y|} \leqslant \frac{\varepsilon}{\alpha^2},$$

чем доказана первая часть предложения. Инвариантное расстояние $|x - y| = d(x, y)$ продолжается на $\hat{K} \times \hat{K}$ по непрерывности и дает расстояние на $\hat{K}$ (§ 2, предложение 1), определяющее топологию последнего и инвариантное в силу принципа продолжения тождеств; мы будем обозначать его по-прежнему $d(x, y)$. Если положить $|x| = d(0, x)$ для всех $x \in \hat{K}$, то ясно, что $|x|$ есть продолжение по непрерывности функции $|x|$ на K, и значит, по принципу продолжения тождеств является абсолютным значением на $\hat{K}$.

3. *Нормированные пространства над нормированным телом*

Определение 5. *Пусть E — векторное пространство* (скажем, левое) *над недискретным нормированным телом K; нормой на E называют его отображение $x \mapsto p(x)$ в $\mathbf{R}_+$, удовлетворяющее следующим аксиомам:*

(NO_I) $p(x) = 0$ *равносильно* $x = 0$;

(NO_{II}) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ *для всех* x, y *из* E;

(NO_{III}) $p(tx) = |t|\, p(x)$ *для всех* $t \in K$ *и* $x \in E$.

Чаще всего встречаются нормированные пространства, имеющие в качестве тела скаляров поле $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ (наделенное обычным абсолютным значением). В книге V будут изучаться специальные свойства этих нормированных пространств.

Из (NO_{III}) вытекает, в частности, что $p(-x) = p(x)$; отсюда, положив $d(x, y) = p(x - y)$, получаем *инвариантное расстояние* d на аддитивной группе векторного пространства E; оно определяет в последнем топологию метрического пространства, согласующуюся с его структурой аддитивной группы (предложение 3). Кроме того, отображение $(t, x) \mapsto tx$ *непрерывно* на $K \times E$; в самом деле, 7 168

$$tx - t_0x_0 = (t - t_0)(x - x_0) + (t - t_0)\, x_0 + t_0 (x - x_0)$$

и, следовательно,

$$p(tx - t_0x_0) \leqslant |t - t_0|\, p(x - x_0) + |t - t_0|\, p(x_0) + |t_0|\, p(x - x_0),$$

так что левая часть может быть сделана сколь угодно малой, если взять достаточно малыми $|t - t_0|$ и $p(x - x_0)$.

Определение 6. *Нормированным пространством над недискретным нормированным телом K называют векторное пространство E над K, наделенное структурой, определяемой заданием на E нормы.*

Нормированное пространство всегда будет считаться наделенным топологией и равномерной структурой, определяемыми его нормой.

Примеры. 1) На недискретном нормированном теле K, рассматриваемом как (левое или правое) векторное пространство относительно самого себя, абсолютное значение $|x|$ является нормой.

2) Выражение $\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, которое мы называли *евклидовой нормой* на пространстве $\mathbf{R}^n$ (гл. VI, § 2), очевидно, есть норма в смысле определения 5. То же верно для функций $\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i |$ и $\sum_{i=1}^{n} | x_i |$.

3) Пусть $\mathscr{B}(E)$ — множество всех функций f на E со значениями в недискретном нормированном теле K, для которых числовая функция $x \mapsto | f(x) |$ *ограничена* на E. Очевидно, это множество есть векторное подпространство (левого или правого) векторного пространства K^E всех отображений E в K. Положим $p(f) = \sup_{x \in E} | f(x) |$, получим *норму* p на векторном пространстве $\mathscr{B}(E)$ (см. гл. X, § 1).

°4) На векторном пространстве $\mathscr{C}(I)$ всех непрерывных конечных числовых функций, определенных на интервале $I = [0, 1]$, функция $p(x) = \int_0^1 | x(t) | \, dt$ является нормой. ∘

Замкнутый шар B с центром 0 и радиусом 1 в нормированном пространстве E, т. е. множество тех $x \in E$, для которых $p(x) \leqslant 1$, называют *единичным шаром* пространства E. Покажем, что *гомотетии* $x \mapsto tx$ единичного шара, где t пробегает множество всех ненулевых элементов из K, образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в E. В самом деле, образом шара B при такой гомотетии служит замкнутый шар с центром 0 и радиусом $| t |$; таким образом, достаточно показать, что для каждого вещественного числа $r > 0$ существует $t \in K$ такое, что $0 < | t | < r$. Но поскольку K наделено абсолютным значением, не являющимся несобственным, существует $t_0 \in K$, для которого $0 < | t_0 | < 1$; следовательно, взяв $t = t_0^n$ с достаточно большим целым n, будем иметь $| t | = | t_0 |^n < r$.

Определение 7. *Две нормы на векторном пространстве E* (над недискретным нормированным телом K) *называют эквивалентными, если они определяют на E одну и ту же топологию.*

Предложение 7. *Для того чтобы нормы p и q на векторном пространстве E были эквивалентны, необходимо и достаточно,*

чтобы существовали числа $a > 0$, $b > 0$ *такие, что*

$$ap(x) \leqslant q(x) \leqslant bp(x) \tag{1}$$

для всех $x \in E$.

В самом деле, эти неравенства *достаточны*, ибо из отношения $ap(x) \leqslant q(x)$ вытекает, что для любого $r > 0$ замкнутый шар с центром 0 и радиусом ar в смысле нормы q содержится в замкнутом шаре с центром 0 и радиусом r в смысле нормы p; таким образом, топология, определяемая нормой q, *мажорирует* топологию, которую определяет p; совершенно так же неравенство $q(x) \leqslant bp(x)$ показывает, что топология, определяемая нормой p, мажорирует определяемую нормой q; следовательно, эти две топологии совпадают.

Покажем теперь, что неравенства (1) *необходимы*. Если топология, определяемая нормой q, мажорирует определяемую нормой p, то единичный шар в смысле нормы p содержит некоторый замкнутый шар с центром 0 и радиусом $\alpha > 0$ в смысле нормы q; иначе говоря, $q(x) \leqslant \alpha$ влечет $p(x) \leqslant 1$. Если $t_0 \in K$ таково, что $0 < |t_0| < 1$, то для каждого $x \neq 0$ из E существует, и притом единственное, целое рациональное k такое, что $\alpha |t_0| < q(t_0^k x) \leqslant \alpha$; тогда $p(t_0^k x) \leqslant 1$, откуда

$$p(x) \leqslant \frac{1}{|t_0|^k} \leqslant \frac{1}{\alpha |t_0|}\, q(x);$$

полагая $a = \alpha |t_0|$, получим, что $ap(x) \leqslant q(x)$ для всех $x \neq 0$, и это неравенство сохраняет силу также для $x = 0$. Таким же образом убеждаемся, что если топология, определяемая нормой p, мажорирует определяемую нормой q, то существует $b > 0$ такое, что $q(x) \leqslant bp(x)$.

Пример. В пространстве $\mathbf{R}^n$ нормы $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, $\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ и $\sum_{i=1}^{n} |x_i|$ эквивалентны, ибо

$$\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant n \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|. \tag{2}$$

Предложение 8. *Пусть* E *— нормированное пространство над недискретным нормированным телом* K, p *— его норма и* $\dot{E}$ *— аддитивная топологическая группа, полученная пополнением адди-*

тивной группы пространства E. Функция $(t, x) \mapsto tx$ продолжается по непрерывности на $\hat{K} \times \hat{E}$ и определяет в $\hat{E}$ структуру векторного пространства над $\hat{K}$; норма p продолжается по непрерывности на $\hat{E}$ до нормы $\bar{p}$, определяющей топологию пространства $\hat{E}$.

Продолжение по непрерывности функции tx есть частный случай теоремы о продолжении непрерывного билинейного отображения произведения $E \times F$ двух коммутативных групп в третью G (гл. III, 2-е изд., § 5, теорема 1; 3-е изд., § 6, теорема 1); по принципу продолжения тождеств имеем $1 \cdot x = x$ и $t(ux) = (tu)x$ для всех $t \in K$, $u \in K$ и $x \in \hat{E}$; следовательно, внешний закон $(t, x) \to tx$ действительно определяет в $\hat{E}$ структуру векторного пространства над K. С другой стороны, инвариантное расстояние $d(x, y) = p(x - y)$ продолжается на $\hat{E} \times \hat{E}$ до инвариантного расстояния $\bar{d}$ на $\hat{E}$ (§ 2, предложение 1), определяющего топологию пространства $\hat{E}$; положив $\bar{p}(x) = \bar{d}(0, x)$, получим продолжение по непрерывности $\bar{p}$ нормы p на $\hat{E}$, удовлетворяющее аксиомам $(\mathrm{NO_I})$ и $(\mathrm{NO_{II}})$; в силу непрерывности tx на $\hat{K} \times \hat{E}$, оно удовлетворяет также условию $(\mathrm{NO_{III}})$ (принцип продолжения тождеств) и является, таким образом, *нормой* на $\hat{E}$.

Рассматривая в векторном пространстве E определенную структуру нормированного пространства, чаще всего (если это не порождает путаницы) обозначают норму вектора x через $\| x \|$.

4. Факторпространства и произведения нормированных пространств

Предложение 9. *Пусть E — нормированное пространство над недискретным нормированным телом K и H — его замкнутое векторное подпространство. Если для каждого класса $\dot{x} \in E/H$ положить $\| \dot{x} \| = \inf_{x \in \dot{x}} \| x \|$, то функция $\| \dot{x} \|$ будет нормой на векторном пространстве E/H, и топология, определяемая этой нормой, будет совпадать с фактортопологией топологии пространства E по H.*

В самом деле (n° 1, замечание 2), $d(\dot{x}, \dot{y}) = \| \dot{x} - \dot{y} \|$ есть инвариантное расстояние на E/H, определяющее фактортопологию

топологии пространства E по H. Остается только убедиться в том, что $\| t\dot{x} \| = | t | \, \| \dot{x} \|$, а это непосредственно следует из определения $\| \dot{x} \|$ (гл. IV, § 5, формула (23)).

Норма $\| \dot{x} \|$ может быть истолкована еще следующим образом: это есть *расстояние* (в E) *от произвольной точки* $x \in \dot{x}$ *до подпространства* H, ибо множество точек из $\dot{x}$ совпадает с множеством точек $x - z$, где z пробегает H.

Предложение 10. *Пусть* $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *— конечное семейство нормированных пространств над недискретным нормированным телом* K; *если для каждой точки* $x = (x_i)$ *векторного пространства* $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ *положить* $\| x \| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \| x_i \|$, *то функция* $\| x \|$ *будет нормой на* E, *а определяемая ею топология в* E *будет совпадать с произведением топологий пространств* E_i.

В самом деле, если $x = (x_i)$ и $y = (y_i)$, то $x + y = (x_i + y_i)$, и, следовательно,

$$\| x + y \| = \sup_i \| x_i + y_i \| \leqslant \sup (\| x_i \| + \| y_i \|) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_i \| x_i \| + \sup_i \| y_i \| = \| x \| + \| y \|.$$

С другой стороны, ясно, что $\| tx \| = | t | \, \| x \|$ и что $\| x \| = 0$ влечет $\| x_i \| = 0$ и, значит, $x_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, т. е. $x = 0$; таким образом, $\| x \|$ действительно есть норма на E. При этом отношение $\| x \| < a$ равносильно n отношениям $\| x_i \| < a$, так что норма $\| x \|$ действительно определяет в E топологию произведения.

Можно доказать, что функции $\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|$ и $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^2}$ тоже являются нормами на E; в силу неравенств (2), указанные три нормы *эквивалентны*.

В частности, если для точки $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (левого или правого) векторного пространства K^n над K положить

$$p_1(x) = \sup_i | x_i |, \quad p_2(x) = \sum_{i=1}^{n} | x_i |, \quad p_3(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2},$$

то функции p_1, p_2, p_3 будут эквивалентными нормами, определяющими в K^n произведение топологий сомножителей K.

5. Непрерывные полилинейные функции

Теорема 1. *Пусть* E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *и* F *— нормированные пространства над недискретным нормированным телом* K, *а* f *— полилинейное отображение произведения* $\prod_{i=1}^{n} E_i$ *в* F. *Для того чтобы* f *было непрерывно на* $\prod_{i=1}^{n} E_i$, *необходимо и достаточно, чтобы существовало число* $a > 0$ *такое, что*

$$\| f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \| \leqslant a \| x_1 \| \| x_2 \| \ldots \| x_n \|, \qquad (3)$$

каковы бы ни были точки $x_i \in E_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Условие *необходимо*. В самом деле, если f непрерывно в точке $(0, 0, \ldots, 0)$, то существует число $b > 0$ такое, что условия $\| x_i \| \leqslant b$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ влекут $\| f(x_1, \ldots, x_n) \| \leqslant 1$. Пусть $t_0 \in K$ таково, что $0 < | t_0 | < 1$; для *каждой* точки $(x_i) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$, в которой все x_i отличны от нуля, существует n целых рациональных чисел k_i таких, что $b | t_0 | < \| t_0^{k_i} x_i \| \leqslant b$; следовательно,

$$| t_0 |^{k_1+k_2+\ldots+k_n} \| f(x_1, \ldots, x_n) \| \leqslant 1;$$

так как, с другой стороны, $\frac{1}{| t_0 |^{k_i}} \leqslant \frac{1}{b | t_0 |} \| x_i \|$, то получаем неравенство (3) с $a = \frac{1}{(b | t_0 |)^n}$; очевидно, оно остается в силе также, если какое-либо из x_i равно нулю.

Условие *достаточно*. В самом деле, покажем, что если оно выполнено, то f непрерывно в каждой точке (a_i) пространства $\prod_{i=1}^{n} E_i$. Имеем

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Но в силу (3) условия $\| x_i - a_i \| \leqslant r$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ влекут

$$\| f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \| \leqslant ar \prod_{h \neq i} (\| a_h \| + r).$$

Обозначая через c верхнюю грань чисел $\|a_i\|$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, получаем отсюда

$$\|f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n)\| \leqslant nar(c + r)^{n-1}.$$

Поскольку правая часть есть полином относительно r без свободного члена, она стремится к 0 при $r \to 0$, чем непрерывность f и доказана.

Замечание. Эта теорема влечет два доказанных выше предложения: с одной стороны, непрерывность билинейной функции tx в силу соотношения $\|tx\| = |t| \|x\|$ и, с другой стороны, предложение 7, которое получается применением теоремы 1 к тождественному отображению E на E, рассматриваемому как линейное отображение пространства E, наделенного нормой p, на пространство E, наделенное нормой q (и обратно).

6. *Абсолютно суммируемые семейства в нормированном пространстве*

Определение 8. *Семейство (x_ι) точек нормированного пространства E называют абсолютно суммируемым, если семейство $(\|x_\iota\|)$ норм точек x_ι суммируемо в* $\mathbf{R}$.

Это понятие только по виду зависит от выбранной на E нормы; в силу предложения 7 и принципа сравнения суммируемых семейств вещественных чисел, семейство, абсолютно суммируемое по норме p на E, абсолютно суммируемо по всякой норме, *эквивалентной* p.

Если $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — суммируемое и абсолютно суммируемое семейство точек из E, то

$$\Big\|\sum_{\iota \in I} x_\iota\Big\| \leqslant \sum_{\iota \in I} \|x_\iota\|. \tag{4}$$

В самом деле, для каждого конечного множества $J \subset I$ имеем $\Big\|\sum_{\iota \in J} x_\iota\Big\| \leqslant \sum_{\iota \in J} \|x_\iota\|$, и неравенство (4) получается отсюда переходом к пределу по фильтрующемуся упорядоченному множеству конечных подмножеств множества I.

Предложение 11. *В полном нормированном пространстве E всякое абсолютно суммируемое семейство суммируемо.*

В самом деле, если (x_ι) — абсолютно суммируемое семейство в E, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечное подмножество J

множества индексов I такое, что $\sum_{\iota \in H} \| x_\iota \| \leqslant \varepsilon$, каково бы ни было конечное множество $H \subset I$, не пересекающееся с J. Следовательно, тем более $\| \sum_{\iota \in H} x_\iota \| \leqslant \varepsilon$, чем в силу полноты E предложение и доказано (критерий Коши, гл. III, 2-е изд., § 4, теорема 1; 3-е изд., § 5, теорема 1).

Ряд с общим членом x_n называют *абсолютно сходящимся* в E, если ряд с общим членом $\| x_n \|$ сходится в $\mathbf{R}$; то же можно выразить, сказав, что семейство (x_n) абсолютно суммируемо; отсюда (гл. III, 2-е изд., § 4, предложение 9; 3-е изд., § 5, предложение 9):

Следствие. *В полном нормированном пространстве E всякий абсолютно сходящийся ряд является коммутативно сходящимся.*

Обращение предложения 11, вообще говоря *неверно.*

Рассмотрим, например, пространство $\mathscr{B}(\mathbf{N})$ всех ограниченных последовательностей $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ вещественных чисел с нормой $\| x \| = \sup_n | x_n |$. Пусть x_m — последовательность $(x_{mn})_{n \in \mathbf{N}}$, в которой $x_{mn} = 0$ при $n \neq m$, $x_{00} = 0$ и $x_{nm} = 1/m$ для всех $m \geqslant 1$. Легко проверить, что последовательность $(x_m)_{m \in \mathbf{N}}$ в $\mathscr{B}(\mathbf{N})$ суммируема и имеет своей суммой элемент $y = (y_n)$, в котором $y_0 = 0$ и $y_n = 1/n$ при $n \geqslant 1$; но поскольку $\| x_m \| = 1/m$, последовательность норм элементов x_m не суммируема в $\mathbf{R}$.

Однако мы видели (гл. VII, § 3, n° 1), что в $\mathbf{R}^n$ всякое суммируемое семейство абсолютно суммируемо.

7. Нормированные алгебры над нормированным телом

Определение 9. *Пусть A — алгебра над недискретным коммутативным нормированным телом K; говорят, что норма $p(x)$ на A* (рассматриваемом как векторное пространство над K) *согласуется с заданной в A структурой алгебры, если топология, определяемая ею в A, согласуется со структурой кольца алгебры A. Алгебра над K, наделенная структурой, определяемой нормой, согласующейся с ее структурой алгебры, называется нормированной алгеброй.*

Если A — нормированная алгебра над K и $p(x)$ — ее норма, то билинейное отображение $(x, y) \mapsto xy$ произведения $A \times A$ в A, по предположению, непрерывно; следовательно (теорема 1), существует число $a > 0$ такое, что $p(xy) \leqslant ap(x)\,p(y)$. Заменяя $p(x)$ эквивалентной нормой $ap(x)$, можно, таким образом, всегда предполагать, что норма $\| x \|$ на нормированной алгебре A удовлетворяет условию

$$\| xy \| \leqslant \| x \| \, \| y \|. \tag{5}$$

По индукции отсюда следует, что

$$\| x^n \| \leqslant \| x \|^n \tag{6}$$

для всех целых $n > 0$.

Примеры. 1) Пусть K — нормированное тело и K' — подтело его центра такое, что след на K' абсолютного значения $| x |$, заданного на K, не является несобственным абсолютным значением на K'; K, наделенное нормой $| x |$, является тогда нормированной алгеброй над K'.

2) Пусть K — недискретное коммутативное нормированное тело и $\mathbf{M}_n(K)$ — кольцо квадратных матриц порядка n над K; известно, что, как векторное пространство над K, $\mathbf{M}_n(K)$ изоморфно K^{n^2}. Положив $\| X \| = \sup_{i,j} | x_{ij} |$ для каждой квадратной матрицы $X = (x_{ij})$ порядка n над K, получим на $\mathbf{M}_n(K)$ норму, и топология, определяемая ею, будет совпадать с топологией произведения в K^{n^2} (предложение 10); отсюда вытекает (в силу непрерывности полиномов нескольких переменных над K), что указанная норма действительно согласуется со структурой алгебры (над K) в $\mathbf{M}_n(K)$.

3) Множество $\mathscr{B}(E)$ всех функций f на множестве E со значениями в недискретном коммутативном нормированном теле K таких, что $x \mapsto | f(x) |$ ограничено на E, есть алгебра над K; норма $\| f \| = \sup_{x \in E} | f(x) |$ согласуется со структурой кольца алгебры $\mathscr{B}(E)$, ибо $\| fg \| \leqslant \| f \| \, \| g \|$ (см. гл. X, § 1).

Пусть $\mathfrak{a}$ — замкнутый двусторонний идеал в нормированной алгебре A; формула $\| \dot{x} \| = \inf_{x \in \dot{x}} \| x \|$ задает в факторалгебре $A/\mathfrak{a}$ норму, определяющую в $A/\mathfrak{a}$ фактортопологию топологии алгебры A по $\mathfrak{a}$ (предложение 9); так как эта фактортопология согласуется со структурой факторкольца факторалгебры $A/\mathfrak{a}$ (гл. III, 2-е изд., § 5, n° 1; 3-е изд., § 6, n° 3), то факторалгебра $A/\mathfrak{a}$, наделенная нормой $\| \dot{x} \|$, есть нормированная алгебра.

Аналогично пусть $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — семейство n нормированных алгебр над нормированным телом K и $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ их произведение; полагая $\|x\| = \sup_i \|x_i\|$ для $x=(x_i)$, получим на A норму; определяемая ею топология совпадает с произведением топологий, заданных в алгебрах A_i (предложение 10); поскольку последняя согласуется со структурой кольца в A (гл. III, 2-е изд., § 5, n° 3; 3-е изд., § 6, n° 4), алгебра A, наделенная нормой $\|x\|$, есть нормированная алгебра.

Пусть A — нормированная алгебра над нормированным телом K. Кольцо $\hat{A}$, получающееся пополнением A (гл. III, 2-е изд., § 5, предложение 2; 3-е изд., § 6, предложение 6), наделено также структурой векторного пространства над $\hat{K}$ (предложение 8) и, очевидно, по принципу продолжения тождеств $t(xy) = (tx)y = x(ty)$ для всех $t\in\hat{K}$, $x\in\hat{A}$, $y\in\hat{A}$; таким образом, $\hat{A}$ есть алгебра над K; так как, с другой стороны (предложение 8), заданная на A норма продолжается по непрерывности до нормы, определяющей топологию кольца $\hat{A}$, то мы видим, что $\hat{A}$, наделенное этой нормой, есть *нормированная алгебра* над $\hat{K}$.

Если $(x_\lambda)_{\lambda\in L}$ и $(y_\mu)_{\mu\in M}$ — абсолютно суммируемые семейства в нормированной алгебре A, то семейство $(x_\lambda y_\mu)_{(\lambda,\mu)\in L\times M}$ абсолютно суммируемо, поскольку $\|x_\lambda y_\mu\|\leqslant\|x_\lambda\|\,\|y_\mu\|$ (гл. IV, 2-е изд., § 7, предложение 2; 3-е изд., § 7, предложение 1); если, кроме того, A полна, то эти три семейства суммируемы и $\sum_{(\lambda,\mu)\in L\times M} x_\lambda y_\mu = \left(\sum_{\lambda\in L} x_\lambda\right)\left(\sum_{\mu\in M} y_\mu\right)$ по ассоциативности суммы, стоящей в левой части равенства (гл. III, 2-е изд., § 4, формула (2); 3-е изд., § 5, формула (2)).

Если нормированная алгебра A обладает *единичным элементом* $e\neq 0$, то отображение $t\mapsto te$ есть изоморфизм структуры тела в K на структуру тела в подтеле Ke алгебры A; этот изоморфизм является вместе с тем изоморфизмом структуры *топологического тела* в K на аналогичную структуру в Ke (наделенное топологией, индуцированной из A), ибо сужение $\|te\|$ нормы из A на K есть норма, эквивалентная абсолютному значению $|t| = \frac{1}{\|e\|}\|te\|$. Если $\|e\| = 1$, то $\|te\| = |t|$, и тогда нормированное тело K можно *отождествить* с нормированным подтелом Ke алгебры A, и, в частности, обозначать единичный элемент алгебры A через 1.

В дальнейшем будет идти речь только о нормированных алгебрах A с единичным элементом e, в которых норма удовлетворяет неравенству (5); положив в нем $x = y = e$, получим, что $\|e\| \geqslant 1$.

Предложение 12. *Если в A ряд с общим членом z^n сходится, то элемент $e - z$ обратим и*

$$(e-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \tag{7}$$

Обратно, если $\|z\| < 1$ и $e - z$ обратим, то ряд с общим членом z^n сходится и имеет место формула (7).

В самом деле, для каждого $p > 0$

$$(e-z)\sum_{n=0}^{p} z^n = e - z^{p+1}. \tag{8}$$

Если ряд с общим членом z^n сходится и y — его сумма, то z^n стремится к 0 при неограниченном возрастании n; следовательно, переходя к пределу в (8), будем иметь $(e-z)\,y = e$; и так же докажем, что $y\,(e-z) = e$ и тем самым что $y = (e-z)^{-1}$ (заметим, что эта часть рассуждения сохраняет силу в произвольном топологическом кольце с единичным элементом).

Обратно, если $\|z\| < 1$, то, поскольку $\|z^{p+1}\| \leqslant \|z\|^{p+1}$, заключаем, что z^{p+1} стремится к 0; умножая обе части равенства (8) слева на $(e-z)^{-1}$ и устремляя p к бесконечности, видим, что ряд с общим членом z^n сходится и имеет своей суммой $(e-z)^{-1}$.

Следствие. *Пусть A — полная нормированная алгебра; тогда $e - z$ обратимо в A для каждого $z \in A$ такого, что $\|z\| < 1$.*

В самом деле, ряд с общим членом z^n абсолютно сходится, ибо $\|z^n\| \leqslant \|z\|^n$ для всех $n > 0$; следовательно, в силу полноты A этот ряд сходится (предложение 11).

Предложение 13. *Пусть G — группа обратимых элементов полной нормированной алгебры A. Тогда G — открытое множество в A; топология, индуцируемая в G из A, согласуется с ее структурой группы; наделенная этой топологией, G является полной группой* (по каждой из двух ее равномерных структур).

Следствие предложения 12 показывает, что G содержит некоторую окрестность V элемента e в A; тогда для каждого $x_0 \in G$

элементы из x_0V обратимы, а x_0V — окрестность x_0 в A, поскольку $x \mapsto x_0x$ есть гомеоморфизм A на себя; следовательно, G открыто в A.

Чтобы убедиться в том, что топология, индуцируемая в группе G из A, согласуется с ее структурой группы, достаточно показать, что функция x^{-1} *непрерывна* на G. Пусть $x_0 \in G$; для каждого $x \in G$ положим $x = x_0\,(e + u)$, т. е. $u = x_0^{-1}(x - x_0)$; тогда $\|u\| \leqslant \|x_0^{-1}\|\,\|x - x_0\|$; следовательно, если $\|x - x_0\| < 1/\|x_0^{-1}\|$, то $\|u\| < 1$, элемент $e + u = x_0^{-1}x$ обратим, ряд с общим членом $(-1)^n u^n$ сходится абсолютно и

$$x^{-1} = (e+u)^{-1}x_0^{-1} = x_0^{-1} + \Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u^n\Big)x_0^{-1}, \tag{9}$$

откуда

$$\|x^{-1} - x_0^{-1}\| \leqslant \Big\|\sum_{n=0}^{\infty} u^n\Big\|\,\|u\|\,\|x_0^{-1}\| \leqslant \Big\|\sum_{n=0}^{\infty} u^n\Big\|\,\|x_0^{-1}\|^2\,\|x - x_0\|.$$

Когда x стремится к x_0, $\|x - x_0\|$ стремится к 0, и так как

$$\Big\|\sum_{n=0}^{\infty} u^n\Big\| \leqslant \|e\| + \frac{\|u\|}{1 - \|u\|}$$

остается ограниченным, то x^{-1} стремится к x_0^{-1}.

Наконец, чтобы установить, что левая равномерная структура группы G есть структура полного пространства, покажем, что всякий фильтр Коши $\mathfrak{F}$ относительно этой структуры является фильтром Коши относительно *аддитивной* равномерной структуры алгебры A и сходится к некоторой точке из G. В самом деле, для каждого ε такого, что $0 < \varepsilon < 1$, существует множество $M \in \mathfrak{F}$ такое, что $\|x^{-1}y - e\| \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in M$ и $y \in M$, откуда $\|y - x\| \leqslant \varepsilon\,\|x\|$. Пусть a — точка из M; для каждого $x \in M$ имеем $\|x - a\| \leqslant \varepsilon\,\|a\|$, откуда $\|x\| \leqslant (1 + \varepsilon)\,\|a\|$. С другой стороны, существует множество $N \subset M$, принадлежащее $\mathfrak{F}$ и такое, что $\|x^{-1}y - e\| \leqslant \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)\,\|a\|}$ для всех $x \in N$ и $y \in N$. Тогда $\|y - x\| \leqslant \frac{\varepsilon\,\|x\|}{(1+\varepsilon)\,\|a\|} \leqslant \varepsilon$, так что $\mathfrak{F}$ есть фильтр Коши относительно аддитивной равномерной структуры в A и, значит, $\mathfrak{F}$ сходится к некоторой точке x_0, поскольку A — полная алгебра. Так как x_0 — предел фильтра $\mathfrak{F}$, то по принципу продолжения

неравенств $\| x^{-1}x_0 - e \| \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in M$; поскольку $\varepsilon < 1$, заключаем, что $x^{-1}x_0$ обратимо; следовательно, обратимо и x_0, т. е. $x_0 \in G$.

Предложение 14. *В полном нормированном теле мультипликативная группа элементов $\neq 0$ есть полная группа.*

Достаточно рассуждать, как при доказательстве предложений 13, заменяя заданную в A норму абсолютным значением, заданным в рассматриваемом теле.

Отметим, что непосредственно применить предложение 13 нельзя, ибо некоммутативное нормированное тело не обязательно является алгеброй над *недискретным* коммутативным нормированным телом (сужение абсолютного значения на центр тела может быть несобственным).

Замечание. Предложение 13 неверно для неполной нормированной алгебры. Например, в алгебре $\mathscr{C}(I)$ конечных непрерывных числовых функций на $I = [0, 1]$ (с нормой $\| x \| = \sup_{t \in I} | x(t) |$) подалгебра P, образованная *полиномами* от t (суженными на I), не полна: пусть $x(t)$ — произвольный полином, отличный от постоянной; полином $1 + \varepsilon x$ при достаточно малом ε сколь угодно близок к единичному элементу 1 подалгебры P, однако $1 + \varepsilon x$ не обратим в P. Тем не менее, если A — неполная нормированная алгебра, G — группа ее обратимых элементов и $\hat{A}$ — нормированная алгебра, полученная пополнением A, то G — подгруппа группы обратимых элементов алгебры $\hat{A}$ и, следовательно, топология, индуцируемая в G из A, согласуется с ее структурой группы.

Упражнения

1) Отклонение f на группе G с мультипликативной записью называют инвариантным слева (соотв. инвариантным справа), если $f(zx, zy) = f(x, y)$ (соотв. $f(xz, yz) = f(x, y)$) для всех x, y, z из G.

а) Если f — отклонение, инвариантное слева, то числовая функция $g(x) = f(e, x)$ на G удовлетворяет следующим условиям: 1° $g(x) \geqslant 0$ для всех $x \in G$ и $g(e) = 0$; 2° $g(x^{-1}) = g(x)$; 3° $g(xy) \leqslant g(x) + g(y)$. Обратно, для всякой числовой функции g, удовлетворяющей этим условиям, $f(x, y) = g(x^{-1}y)$ есть отклонение на G, инвариантное слева.

б) Для того чтобы топология $\mathscr{T}$, определенная в группе G насыщенным семейством (§ 1, п° 2) инвариантных слева отклонений (f_ι), согласовалась с ее структурой группы, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $a \in G$, каждого индекса ι и каждого $\alpha > 0$ существовали индекс $\varkappa$ и число $\beta > 0$ такие, что $f_\iota(e, axa^{-1}) \leqslant \alpha$ для

всех $x \in G$ таких, что $f_\kappa(e, x) \leqslant \beta$. Если это условие выполнено, то равномерная структура, определенная в G семейством (f_ι), совпадает с левой равномерной структурой топологической группы получаемой при наделении G топологией $\mathscr{T}$.

в) На каждой топологической группе G существует семейство инвариантных слева отклонений такое, что определяемая им равномерная структура совпадает с левой равномерной структурой группы G.

2) Пусть G — топологическая группа, левая и правая равномерные структуры которой совпадают. Показать, что эта общая равномерная структура может быть определена семейством отклонений на G, инвариантных *одновременно* слева и справа. [Используя упражнение 3 § 3 главы III, показать, что, какова бы ни была окрестность V нейтрального элемента e группы G, также $V_0 = \bigcap_{x \in G} xVx^{-1}$ есть окрестность e.]

3) Пусть G — топологическая группа и (f_ι) — насыщенное семейство инвариантных слева отклонений, определяющее ее левую равномерную структуру; положим $g_\iota(x) = f_\iota(e, x)$. Пусть H — замкнутый нормальный делитель группы G; для каждого класса $\dot{x} \in G/H$ положим $h_\iota(\dot{x}) = \inf_{x \in \dot{x}} g_\iota(x)$; показать, что функции $\bar{f}_\iota$, заданные формулой $\bar{f}_\iota(\dot{x}, \dot{y}) = h_\iota(\dot{x}^{-1}\dot{y})$, образуют семейство инвариантных слева отклонений, определяющее левую равномерную структуру факторгруппы G/H. [Рассуждать, как в замечании 2 из n° 1.]

4) Показать, что топология нормированного тела удовлетворяет условию (KT_a) упражнения 13 § 5 главы III 2-го изд.*).

°*5) Пусть ω — абсолютное значение на теле Q рациональных чисел.

а) Показать, что ω полностью определяется своими значениями на простых числах.

б) Показать, что если существует простое число p такое, что $\omega(p) \leqslant 1$, то и для любого другого простого числа q имеем $\omega(q) \leqslant 1$. [Оценить сверху $\omega(q^n)$, записывая q^n в системе счисления с базисом p, и устремить n к бесконечности.]

в) Показать, что если существует простое число p такое, что $\omega(p) < 1$, то для любого другого простого числа q имеем $\omega(q) = 1$. [Показать невозможность неравенства $\omega(q) < 1$, используя тот факт, что для каждого целого $n > 0$ существуют целые рациональные r и s такие, что $1 = rp^n + sq^n$.] Вывести отсюда, что ω есть тогда абсолютное значение, получаемое из *p-адического* нормирования на Q.

*) А именно, каковы бы ни были окрестности U и V нуля, существует окрестность W нуля такая, что $W(CV)^{-1} \subset U$ и $(CV)^{-1}W \subset U$.

г) Показать, что если $\omega(p) > 1$ для каждого простого числа p, то, каковы бы ни были простые числа p и q,

$$\frac{\log \omega(p)}{\log p} = \frac{\log \omega(q)}{\log q}.$$

[Тот же метод, что и в пункте б).] Вывести отсюда, что тогда $\omega(x) = |x|^{\rho}$ где $\rho \leqslant 1$.

6) Пусть E — левое векторное пространство над телом K, обладающее счетным базисом (a_n), и (r_n) — убывающая последовательность чисел >0, стремящаяся к 0; положим $\|0\| = 0$, и для каждого элемента $x = \sum_k t_k a_k \neq 0$ из E положим $\|x\| = r_h$, где h — наименьший из индексов k, при которых $t_k \neq 0$. Показать, что $\|x - y\|$ есть инвариантное расстояние на аддитивной группе пространства E и что топология, определяемая им в E, не зависит от выбранной последовательности (r_n) (убывающей и стремящейся к 0). Вывести отсюда что если распространить определения нормы и нормированного пространства (определения 5 и 6) на случай, когда рассматриваемое абсолютное значение на теле скаляров — несобственное, то предложение 7 и теорема 1 не будут больше справедливы.

7) Пусть E — нормированное пространство над нормированным телом. Показать, что если всякое абсолютно суммируемое семейство в E суммируемо в E, то E полно. [Рассмотреть такую подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности Коши (x_n) в E, чтобы ряд с общим членом $x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ был абсолютно сходящимся.]

8) Дать пример суммируемого, но не абсолютно суммируемого семейства в теле $\mathbf{Q}_p$ p-адических чисел. [Использовать упражнение 28 § 5 главы III 2-го изд. *).]

9) Отображение w кольца A в $\mathbf{R}_+$ называется *полуабсолютным значением* на A, если оно удовлетворяет следующим условиям: 1° $w(0) = 0$; 2° $w(x - y) \leqslant w(x) + w(y)$; 3° $w(xy) \leqslant w(x)\, w(y)$. Полуабсолютное значение w называется *отделимым*, если $w(x) = 0$ влечет $x = 0$. Если w — отделимое полуабсолютное значение на A, то $w(x - y)$ есть инвариантное расстояние на аддитивной группе кольца A и, следовательно, определяет топологию, согласующуюся с его структурой аддитивной группы; показать, что эта топология согласуется с его структурой кольца. Обобщить на кольца, наделенные полуабсолютным значением, основные свойства нормированных алгебр, в частности предложение 13.

Если w — неотделимое полуабсолютное значение на A, то множество $w^{-1}(0)$ является двусторонним идеалом a в A. Топология в A, определяемая отклонением $w(x - y)$, согласуется с заданной струк-

*) В 3-м издании не воспроизведено.

турой кольца в A, и отделимое пространство, ассоциированное с A, есть не что иное, как факторкольцо $A/\mathfrak{a}$, на котором функция $\overline{w}(\dot{x})$, равная для каждого класса $\dot{x} \bmod \mathfrak{a}$ общему значению функции $w(x)$ во всех $x \in \dot{x}$, является отделимым полуабсолютным значением, называемым *ассоциированным* с w, определяющим фактортопологию топологии кольца A по $\mathfrak{a}$.

*10) а) Полуабсолютные значения w_1 и w_2 на кольце A называются эквивалентными, если эквивалентны отклонения $w_1(x-y)$ и $w_2(x-y)$. Показать, что если w — полуабсолютное значение на A, то aw и $w^{1/a}$ — полуабсолютные значения, эквивалентные w, для всех $a \geqslant 1$.

б) Пусть w_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — полуабсолютные значения на кольце A; тогда функции $w = \sum_i w_i$ и $w' = \sup_i w_i$ — эквивалентные полуабсолютные значения на A. Если $\mathfrak{a}_i = \overline{w}_i^{-1}(0)$, то $\mathfrak{a} = \overline{w}^{-1}(0) = \bigcap_i \mathfrak{a}_i$. Обозначая через A_i пополнение факторкольца $A/\mathfrak{a}_i$, наделенного отделимым полуабсолютным значением, ассоциированным с w_i, показать, что $A/\mathfrak{a}$, наделенное отделимым полуабсолютным значением, ассоциированным с w, изоморфно подкольцу кольца $\prod_i A_i$; для того чтобы это подкольцо было всюду плотно в $\prod_i A_i$, необходимо и достаточно (в предположении, что A обладает единичным элементом 1), чтобы полуабсолютные значения w_i удовлетворяли следующему условию: для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого индекса i существует элемент $x \in A$ такой, что $w_i(1-x) \leqslant \varepsilon$ и $w_k(x) \leqslant \varepsilon$ для всех индексов $k \neq i$.

11) Пусть A — кольцо, наделенное отделимым полуабсолютным значением, полное в топологии, определяемой этим полуабсолютным значением, и обладающее единичным элементом. Показать, что всякий максимальный идеал в A *замкнут*. [Использовать предложение 13.]

*12) Пусть K — отделимое недискретное топологическое тело и φ — отображение K в $\mathbf{R}_+$ такое, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ и множества V_n тех $x \in K$, для которых $\varphi(x) \leqslant 1/n$, образуют фундаментальную систему окрестностей 0 в K.

а) Показать, что существует число $a > 0$, для которого $\varphi(1+x) \leqslant a(1+\varphi(x))$. [В противном случае существовала бы последовательность (x_n) точек из K такая, что $(1+x)^{-1}$ и $x_n(1+x_n)^{-1}$ стремились бы к 0.] Вывести отсюда, что функция $\psi(x) = (\varphi(x))^{\alpha}$ для достаточно малых α удовлетворяет неравенству

$$\psi(x+y) \leqslant 2 \sup(\psi(x), \psi(y)) \qquad (1)$$

б) Показать, что если $n = 2^p$, то $\psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant n \sup(\psi(x_i))$; вывести отсюда, что $\psi(m) \leqslant 2m$ для каждого целого $m > 0$.

в) Вывести из б), что для всех $n = 2^p$ и всех $x \in K$ выполняется неравенство $\psi((1+x)^{n-1}) \leqslant 2n(1+\psi(x))^{n-1}$; заключить отсюда, что ψ есть *абсолютное значение* на K, определяющее его топологию.

*13) Пусть K — отделимое недискретное топологическое тело, R — множество тех $x \in K$, для которых $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, и N — дополнение множества $R \cup R^{-1}$. Показать, что для того, чтобы на K существовало абсолютное значение, определяющее его топологию, необходимо и достаточно, чтобы: 1° R было открыто в K; 2° для каждой окрестности V нуля в K существовала окрестность U нуля в K такая, что $RU \subset V$; 3° отношения $x \in R$ и $y \in R \cup N$ влекли $yx \in R$.

Для доказательства достаточности этих условий установить последовательно, что:

а) N есть нормальный делитель мультипликативной группы K^* ненулевых элементов из K.

б) Если в факторгруппе K^*/N положить $\dot{x} \leqslant \dot{y}$, когда существуют $x \in \dot{x}$ и $y \in \dot{y}$, для которых $yx^{-1} \in R \cup N$, то это отношение будет отношением порядка, согласующимся с ее структурой группы; определенная так упорядоченная группа K^*/N изоморфна подгруппе аддитивной группы $\mathbf{R}$. [Использовать упражнение 1 § 3 главы V.]

в) В заключение воспользоваться упражнением 12.

В частности, топология недискретного локально компактного коммутативного тела может быть задана абсолютным значением. См. гл. III, 2-е изд. § 5, упражнения 19 и 20 *).]

§ 4. Нормальные пространства

1. Определение нормальных пространств

Аксиома (O_{IV}) равномеризуемых пространств (§ 1, п° 5) может быть сформулирована следующим образом: *каковы бы ни были замкнутое множество A и точка $x \in \complement A$, существует непрерывное отображение пространства E в $[0, 1]$, равное 0 в точке x и 1 во всех точках из A*; это свойство выражают еще, говоря, что в равномеризуемом пространстве *точка и замкнутое множество* (не содержащее эту точку) *отделимы непрерывной числовой функцией*.

Мы перейдем сейчас к изучению пространств, в которых можно подобным же образом *отделить непрерывной числовой функцией всякие два непересекающихся замкнутых множества*; точно говоря:

*) В 3-м издании не воспроизведены.

Определение 1. *Топологическое пространство E называют нормальным, если оно отделимо и удовлетворяет следующей аксиоме*:

(O_V) *Каковы бы ни были непересекающиеся замкнутые множества A и B в E, существует непрерывное отображение E в $[0, 1]$, равное 0 во всех точках из A и 1 во всех точках из B.*

Ясно, что всякое нормальное пространство вполне регулярно; но существуют вполне регулярные пространства, не являющиеся нормальными (см. упражнения 9, 10, 13, 26 и § 5, упражнения 15 и 16).

В формулировку аксиомы (O_V), как и аксиомы (O_{IV}), входит как вспомогательное множество числовая прямая $\mathbf{R}$. Однако можно дать формулировку, равносильную (O_V), в которую не входит уже никакое вспомогательное множество:

Теорема 1 (Урысон). *Аксиома (O_V) равносильна следующей*:

(O'_V) *Каковы бы ни были непересекающиеся замкнутые множества A и B в E, существуют непересекающиеся открытые множества U и V в E такие, что $A \subset U$ и $B \subset V$.*

Ясно, что (O_V) влечет (O'_V), ибо если f — непрерывное отображение E в $[0, 1]$, равное 0 на A и 1 на B, то открытые множества $\overleftarrow{f}([0, 1/2[)$ и $\overleftarrow{f}(]1/2, 1])$ содержат соответственно A и B и не имеют общих точек.

Чтобы доказать обратное, заметим сначала, что аксиома (O'_V) равносильна следующей аксиоме:

(O''_V) *Каковы бы ни были замкнутое множество A и его открытая окрестность V, существует открытая окрестность W множества A такая, что $\overline{W} \subset V$.*

Если существует непрерывное отображение f пространства E в $[-1, +1]$, равное -1 на A и 1 на B, то, полагая $U(t) = \overleftarrow{f}([-1, t[)$ для каждого $t \in]0, 1]$, получим в E семейство открытых множеств, имеющее $]0, 1]$ своим множеством индексов, такое, что $A \subset U(0)$, $B \subset \complement U(1)$ и

$$\overline{U(t)} \subset U(t') \tag{1}$$

для каждой пары вещественных чисел t, t' такой, что $0 \leqslant t < t' \leqslant 1$, поскольку $U(t)$ содержится в замкнутом множестве

$\overline{f}^1$ ($[-1, t]$). Обратно, предположим, что определено семейство открытых множеств $U(t)$ ($0 \leqslant t \leqslant 1$), обладающее этими тремя свойствами; для каждого $x \in E$ положим $g(x)$ равным 1, если $x \in \mathbf{C}U(1)$, и равным нижней грани тех t, для которых $x \in U(t)$, в противном случае. Очевидно, тогда $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$ для всех $x \in E$, $g(x) = 0$ на A, $g(x) = 1$ на B; наконец, g *непрерывно* на E: в самом деле, положив $g(x) = a$, будем иметь $|g(y) - g(x)| \leqslant \varepsilon$ для каждого y, принадлежащего множеству $U(a + \varepsilon) \cap \mathbf{C}\overline{U(a-\varepsilon)}$, являющемуся окрестностью x в силу (1) (если еще условиться считать $U(a + \varepsilon) = E$ при $a + \varepsilon > 1$, и $U(a - \varepsilon) = \varnothing$ при $a - \varepsilon < 0$).

Таким образом, все сводится к определению семейства открытых множеств $U(t)$ указанного типа, опираясь на аксиому (O'_V). Примем $U(1) = \mathbf{C}B$; так как $A \subset U(1)$, то, согласно (O''_V), существует открытое множество $U(0)$ такое, что $A \subset U(0)$ и $\overline{U(0)} \subset U(1)$. Предположим затем, что для каждого *двоично-рационального* числа $k/2^n$ ($k = 0, 1, \ldots, 2^n$) уже определено открытое множество $U(k/2^n)$ так, что $\overline{U(k/2^n)} \subset U((k+1)/2^n)$ ($0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$). Для каждого двоично-рационального числа $(2k+1)/2^{n+1}$ ($0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$), согласно (O''_V), существует открытое множество $U((2k+1)/2^{n+1})$ такое, что

$$\overline{U(k/2^n)} \subset U((2k+1)/2^{n+1}) \text{ и } \overline{U((2k+1)/2^{n+1})} \subset U((k+1)/2^n).$$

Таким образом, для каждого двоично-рационального числа r такого, что $0 \leqslant r \leqslant 1$, можно определить открытое множество $U(r)$ так, чтобы $A \subset U(0)$, $B \subset \mathbf{C}U(1)$ и

$$\overline{U(r)} \subset U(r') \tag{2}$$

для всякой пары двоично-рациональных чисел r, r' таких, что $0 \leqslant r < r' \leqslant 1$.

Положим теперь для каждого вещественного числа $t \in [0\ 1]$

$$U(t) = \bigcup_{r<t} U(r) \quad (r \text{ — двоично-рациональные числа});$$

в силу (2) это определение совпадает с предыдущим в случае, когда t — двоично-рациональное число; с другой стороны, если $0 \leqslant t < t' \leqslant 1$, то существуют двоично-рациональные числа r, r' такие, что $t \leqslant r < r' \leqslant t'$; в силу (2) тогда $U(t) \subset U(r)$ и, сле-

довательно, $\overline{U(t)} \subset \overline{U(r)} \subset U(r') \subset U(t')$, чем устанавливается отношение (1) и завершается доказательство.

Теорема 1 позволит нам доказать нормальность двух важных категорий топологических пространств. Прежде всего:

Предложение 1. *Компактное пространство нормально.*

В самом деле, такое пространство удовлетворяет аксиоме (O'_V) в силу предложения 2 § 10 главы I 2-го изд. (3-е изд., гл. I, § 9, предложение 2).

Что касается *локально компактных* пространств, то всякая точка такого пространства обладает компактной окрестностью, которая является нормальным подпространством; однако можно указать примеры локально компактных пространств, *не являющихся нормальными* (см. упражнения 9 и 26 и § 5, упражнение 15).

Предложение 2. *Метризуемое пространство нормально.*

Пусть E — метризуемое пространство, d — расстояние, согласующееся с его топологией, а A и B — непересекающиеся замкнутые множества в E; так как функции $d(x, A)$ и $d(x, B)$ непрерывны, то множество U (соотв. V) тех точек x, для которых $d(x, A) < d(x, B)$ (соотв. $d(x, B) < d(x, A)$), открыто; ясно, что $A \subset U$, $B \subset V$ и U и V не пересекаются; таким образом, аксиома (O'_V) выполнена.

Замечания. 1) Предложение 2 дает новое необходимое условие метризуемости топологического пространства, но это условие, даже в соединении со всеми необходимыми условиями, данными в § 2, не дает системы условий, достаточной для метризуемости топологического пространства (см. упражнение 6 и § 5, упражнение 10).

2) Можно указать примеры нормальных пространств, не являющихся ни метризуемыми, ни локально компактными (см. § 5, упражнение 16).

В силу (O'_V), всякое *замкнутое* множество в нормальном пространстве является *нормальным подпространством*; но это свойство не всегда верно для *произвольного* подмножества нормального пространства.

Например, вполне регулярное, но не нормальное пространство, гомеоморфно подпространству компактного пространства (§ 1, предложение 3), а последнее нормально.

Отметим, наконец, что *произведение* двух нормальных пространств не обязательно нормально (см. упражнение 9 и § 5, упражнение 16).

2. *Продолжение непрерывной числовой функции*

Пусть E и F — топологические пространства и A — замкнутое множество в E (отличное от E); не всегда возможно продолжить непрерывное отображение A в F до непрерывного отображения всего E в F. При $F = \overline{\mathbf{R}}$ условие возможности такого продолжения дается следующей теоремой:

Теорема 2 (Урысон). *Аксиома* (O_V) *равносильна следующему свойству*:

(O_V'') *Каковы бы ни были замкнутое множество* A *в* E *и непрерывная числовая функция (конечная или нет)* f, *определенная на* A, *существует продолжение* g *функции* f *на все пространство* E, *являющееся непрерывным отображением* E *в* $\overline{\mathbf{R}}$.

Ясно, что (O_V'') влечет (O_V). В самом деле, если B и C непересекающиеся замкнутые множества в E, то функция, равная 0 на B и 1 на C, определена и непрерывна на замкнутом множестве $B \cup C$. Если f — непрерывное продолжение этой функции на E, то функция $g = \inf(f^+, 1)$ будет непрерывна на E, принимать значения в $[0, 1]$ и равна 0 на B и 1 на C.

Покажем, обратно, что (O_V) влечет (O_V''); поскольку $\overline{\mathbf{R}}$ и интервал $[-1, +1]$ гомеоморфны, можно ограничиться случаем, когда f есть непрерывное отображение A в $\overline{\mathbf{R}}$, принимающее значения в $[-1, +1]$. Мы определим продолжение g функции f, образуя последовательность (g_n) непрерывных функций на E, для которой последовательность $(g_n(x))$ будет сходиться в каждой точке к некоторому числу из интервала $[-1, +1]$; этот предел будет по определению значением $g(x)$, и из выбора функций g_n будет следовать, что функция g удовлетворяет требуемым условиям.

Определение функций g_n основывается на следующей лемме:

Лемма 1. *Пусть* u *— непрерывное отображение замкнутого множества* $A \subset E$ *в* $[-1, +1]$; *существует непрерывное отображение* v *пространства* E *в* $[-1/3, 1/3]$ *такое, что* $|u(x) - v(x)| \leqslant 2/3$ *для всех* $x \in A$.

В самом деле, пусть H — множество тех $x \in A$, для которых $-1 \leqslant u(x) \leqslant -1/3$, и K — множество тех $x \in A$, для которых $1/3 \leqslant u(x) \leqslant 1$; H и K замкнуты в A, а значит и в E, и не пересекаются; по (O_V) существует непрерывное отображение v про-

странства E в $[-1/3, 1/3]$, равное $-1/3$ на H и $1/3$ на K; оно и удовлетворяет условиям леммы.

Определим теперь g_n по индукции. Применив лемму к $u = f$, определим g_0 как непрерывное отображение E в $[-1/3, 1/3]$, для которого $|f(x) - g_0(x)| \leqslant 2/3$ на A. Предположим затем определенным непрерывное отображение g_n пространства E в интервал $[-1 + (2/3)^{n+1}, 1 - (2/3)^{n+1}]$ такое, что $|f(x) - g_n(x)| \leqslant (2/3)^{n+1}$ на A. Применяя лемму к функции $u(x) = (3/2)^{n+1}(f(x) - g_n(x))$, убедимся в существовании непрерывного отображения h_{n+1} пространства E в интервал $[-2^{n+1}/3^{n+2}, 2^{n+1}/3^{n+2}]$ такого, что

$$|f(x) - g_n(x) - h_{n+1}(x)| \leqslant (2/3)^{n+2}$$

на A, и продолжим индукцию, положив $g_{n+1} = g_n + h_{n+1}$; эта функция в силу определения h_{n+1} действительно будет удовлетворять на E неравенству $|g_{n+1}(x)| \leqslant 1 - (2/3)^{n+2}$.

Из этого определения следует, что

$$|g_m(x) - g_n(x)| \leqslant \frac{2^{p+1}}{3^{p+2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}$$

для всех $m \geqslant p$, $n \geqslant p$ и $x \in E$; отсюда прежде всего вытекает, что $(g_n(x))$ есть последовательность Коши и, следовательно, сходится к некоторой точке $g(x)$ интервала $[-1, +1]$; а так как $f(x) - g_n(x)$ стремится к 0 во всех точках из A при неограниченном возрастании n, то g действительно является продолжением f на E. Остается убедиться в *непрерывности* функции g на E.

Итак, пусть x — произвольная точка из E; каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует n_0 такое, что $|g_m(y) - g_n(y)| \leqslant \varepsilon$ для всех $m \geqslant n_0$, $n \geqslant n_0$ и $y \in E$, и значит также, устремляя m к $+\infty$, что $|g(y) - g_n(y)| \leqslant \varepsilon$; пусть V — окрестность точки x такая, что $|g_n(y) - g_n(x)| \leqslant \varepsilon$ для всех $y \in V$; тогда для всех $y \in V$ будем также иметь

$$|g(y) - g(x)| \leqslant |g(y) - g_n(y)| + |g_n(y) - g_n(x)| + |g(x) - g_n(x)| \leqslant 3\varepsilon,$$

что доказывает непрерывность g в точке x и завершает доказательство (эта последняя часть рассуждения использует для частного случая понятие *равномерной сходимости*, которое будет определено в общем виде в § 1 главы X).

Следствие. *Если* f — конечная *числовая функция, определенная и непрерывная на замкнутом множестве* $A \subset E$, *то существует* конечная *числовая функция* g, *определенная и непрерывная на* E, *продолжающая* f.

Проведем сначала доказательство для случая, когда $f(x) \geqslant 0$; тогда существует непрерывное продолжение g_1 функции f на E, принимающее значения в $[0, +\infty]$. Множество $B = g_1^{-1}(+\infty)$ замкнуто и в силу предположения не пересекается с A; поэтому функция h, равная f на A и 0 на B, есть непрерывная функция на замкнутом множестве $A \cup B$. Пусть g_2 — ее непрерывное продолжение на E, снова со значениями в $[0, +\infty]$; тогда функция $g = \inf(g_1, g_2)$ будет непрерывным продолжением f на E с *конечными* значениями $\geqslant 0$ во всех точках из E.

Чтобы перейти отсюда к общему случаю, достаточно заметить, что если f конечна и непрерывна на A, то то же справедливо для функций f^+ и f^-; пусть g_1 и g_2 — непрерывные конечные функции, продолжающие соответственно f^+ и f^- на E; тогда $g_1 - g_2$ будет конечной непрерывной функцией, продолжающей f на E.

Замечание. Если E — нормальное пространство и A — его замкнутое подмножество, то существует также непрерывное продолжение на E всякого непрерывного отображения f подпространства A в *куб* K^I (§ 1, п° 5); в самом деле, тогда $f = (f_\iota)_{\iota \in I}$, где f_ι — непрерывное отображение A в компактный интервал $K \subset \mathbb{R}$; и так как существует непрерывное отображение g_ι пространства E в K, продолжающее f_ι, то отображение $g = (g_\iota)$ будет непрерывным продолжением f на E.

3. *Локально конечные открытые покрытия замкнутого множества в нормальном пространстве*

В главе I, § 10, п° 12 2-го изд. (3-е изд., гл. I, § 1, п° 5) было определено понятие локально конечного покрытия топологического пространства E. Более общим образом, семейство $(A_\iota)_{\iota \in I}$ подмножеств множества E называют *локально конечным*, если каждая точка $x \in E$ обладает окрестностью V такой, что $V \cap A_\iota \neq \varnothing$ лишь для конечного числа индексов $\iota \in I$. Множество $\mathfrak{S}$ подмножеств множества E называют *локально конечным*, если семейство

множеств, определенное тождественным отображением $\mathfrak{S}$ на себя, локально конечно.

Лемма 2. *Объединение локально конечного семейства замкнутых подмножеств топологического пространства замкнуто в E.*

В самом деле, пусть $(F_\iota)_{\iota\in I}$ — локально конечное семейство замкнутых множеств в E и $x \in E$ — точка прикосновения множества $\bigcup_{\iota\in I} F_\iota$; она обладает окрестностью V, пересекающейся только с множествами F_ι, соответствующими индексам, принадлежащим некоторому конечному множеству $H \subset I$; отсюда следует, что x есть точка прикосновения замкнутого множества $\bigcup_{\iota\in H} F_\iota$, чем лемма и доказана.

Теорема 3. *Пусть $(A_\iota)_{\iota\in I}$ — локально конечное открытое покрытие замкнутого множества F в нормальном пространстве E. Существует открытое покрытие $(B_\iota)_{\iota\in I}$ множества F такое, что $\overline{B}_\iota \subset A_\iota$ для всех $\iota \in I$.*

Наделим I структурой *вполне упорядоченного* множества (Теор. множ., гл. III, § 2, теорема 1) и определим с помощью трансфинитной индукции семейство $(B_\iota)_{\iota\in I}$ открытых множеств в E так, чтобы: 1° $\overline{B}_\iota \subset A_\iota$ для всех $\iota \in I$; 2° для каждого $\iota \in I$ семейство, образованное всеми B_λ, у которых $\lambda \leqslant \iota$, и всеми A_λ, у которых $\lambda > \iota$, было открытым покрытием множества F. Предположим, что множества B_ι определены для $\iota < \gamma$ так, что указанные два свойства имеют место *для всех* $\iota < \gamma$, и покажем, что B_γ можно определить так, чтобы эти свойства имели место и для $\iota = \gamma$. Покажем сначала, что множества B_ι, у которых $\iota < \gamma$, вместе с множествами A_ι, у которых $\iota \geqslant \gamma$, образуют покрытие множества F. По предположению, для каждого $x \in F$ имеется лишь конечное число индексов $\lambda \in I$ таких, что $x \in A_\lambda$; пусть это будут $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$, и пусть λ_h — наибольшее из тех λ_i, которые $< \gamma$; если $h < n$, то $x \in A_{\lambda_n}$ и $\lambda_n \geqslant \gamma$; если $h = n$, то предпосылка индукции показывает, что x принадлежит некоторому B_λ, у которого $\lambda \leqslant \lambda_n < \gamma$; этим и доказана справедливость утверждения. Положим далее $C = (CF) \cup \left(\bigcup_{\iota<\gamma} B_\iota\right) \cup \left(\bigcup_{\iota>\gamma} A_\iota\right)$; C открыто и, по сказанному выше, $CA_\gamma \subset C$; поэтому в силу аксиомы $(O\tilde{\gamma})$

нормальных пространств, существует открытое множество V такое, что $\complement A_\gamma \subset V \subset \overline{V} \subset C$. Положив $B_\gamma = \complement\overline{V}$, будем иметь $B_\gamma \subset \complement V \subset A_\gamma$ и $B_\gamma \cup C = E$, так что множества B_ι, у которых $\iota \leqslant \gamma$, вместе с множествами A_ι, у которых $\iota > \gamma$, образуют покрытие множества F.

Замечание. Отметим, что мы использовали только то, что покрытие (A_ι) *точечно конечно*, т. е. что каждая точка из F принадлежит только конечному числу множеств A_ι.

Определение 2. *Пусть E — топологическое пространство и f — определенная на нем числовая функция. Наименьшее замкнутое множество S в E такое, что $f(x) = 0$ на $\complement S$, называют носителем f и обозначают* $\operatorname{supp}(f)$.

Другими словами, $\operatorname{supp}(f)$ есть замыкание в E множества тех $x \in E$, для которых $f(x) \neq 0$; можно еще сказать, что это — множество тех точек $x \in E$, в каждой окрестности которых существует точка y, для которой $f(y) \neq 0$.

Пусть $(f_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство конечных числовых функций, носители которых образуют *локально конечное* семейство; тогда сумма $\sum_{\iota \in I} f_\iota(x)$ определена для каждого $x \in E$ (поскольку содержит лишь конечное число ненулевых членов); конечную числовую функцию $x \mapsto \sum_{\iota \in I} f_\iota(x)$ называют *суммой* семейства (f_ι) и обозначают $\sum_{\iota \in I} f_\iota$. Если каждая из функций f_ι *непрерывна*, то непрерывна и функция $f = \sum_{\iota \in I} f_\iota$; в самом деле, каждая точка $x \in E$ обладает окрестностью V, пересекающейся лишь с конечным числом носителей функций f_ι, и, следовательно, имеется конечное множество $H \subset I$ такое, что $f(y) = \sum_{\iota \in H} f_\iota(y)$ для всех $y \in V$.

Определение 3. *Пусть $(A_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство подмножеств топологического пространства E; говорят, что семейство $(f_\iota)_{\iota \in I}$ числовых функций, определенных на E, подчинено семейству $(A_\iota)_{\iota \in I}$, если* $\operatorname{supp}(f_\iota) \subset A_\iota$ *для каждого* $\iota \in I$.

Непрерывным разложением единицы на E называется всякое семейство $(f_\iota)_{\iota\in I}$ непрерывных числовых функций $\geqslant 0$ на E таких, что их носители образуют локально конечное семейство и $\sum_{\iota\in I} f_\iota(x) = 1$ *для всех* $x \in E$.

Предложение 3. *Для каждого локально конечного открытого покрытия $(A_\iota)_{\iota\in I}$ нормального пространства существует подчиненное этому покрытию непрерывное разложение единицы $(f_\iota)_{\iota\in I}$ на E.*

Применяя теорему 3, рассмотрим открытое покрытие $(B_\iota)_{\iota\in I}$ пространства E такое, что $\overline{B}_\iota \subset A_\iota$ для всех $\iota \in I$; очевидно, это покрытие локально конечно. По аксиоме (O''_V) для каждого $\iota \in I$ существует открытое множество C_ι такое, что $\overline{B}_\iota \subset C_\iota \subset \overline{C}_\iota \subset A_\iota$. По аксиоме (O_V) для каждого $\iota \in I$ существует непрерывное отображение g_ι пространства E в $[0, 1]$ такое, что $g_\iota(x) = 1$ на $\overline{B}_\iota$, а носитель g_ι содержится в $\overline{C}_\iota$ и, следовательно, в A_ι. Так как (B_ι) — покрытие пространства E, то $\sum_{\iota\in I} g_\iota(x) > 0$ для каждого $x \in E$; положим $f_\iota(x) = g_\iota(x)/(\sum_{\iota\in I} g_\iota(x))$ для каждого $\iota \in I$ и каждого $x \in E$; тогда функции f_ι образуют непрерывное разложение единицы, подчиненное покрытию (A_ι).

Следствие. *Для каждого локально конечного открытого покрытия $(A_\iota)_{\iota\in I}$ замкнутого множества F в нормальном пространстве E существует семейство $(f_\iota)_{\iota\in I}$ числовых функций $\geqslant 0$, определенных и непрерывных на E, подчиненное покрытию $(A_\iota)_{\iota\in I}$ и такое, что $\sum_{\iota\in I} f_\iota(x) = 1$ для всех $x \in F$ и $\sum_{\iota\in I} f_\iota(x) \leqslant 1$ для всех $x \in E$.*

В самом деле, семейство множеств, состоящее из всех A_ι и $\complement F$, является локально конечным открытым покрытием пространства E. Поэтому существует подчиненное ему непрерывное разложение единицы, образованное семейством $(f_\iota)_{\iota\in I}$ таким, что $\operatorname{supp}(f_\iota) \subset A_\iota$ для всех $\iota \in I$, и функцией g с носителем, содержащимся в $\complement F$; ясно, что семейство (f_ι) и обладает требуемыми свойствами.

4. Паракомпактные пространства

Напомним (гл. I, 2-е изд., § 10, n° 12; 3-е изд., § 9, n° 10), что топологическое пространство E называется *паракомпактным*, если оно отделимо и для каждого открытого покрытия E существует мажорирующее его локально конечное открытое покрытие.

Предложение 4. *Всякое паракомпактное пространство нормально.*

Это предложение вытекает из следующей леммы:

Лемма 3. *Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые множества в паракомпактном пространстве E. Если для каждого $x \in A$ существуют непересекающиеся открытая окрестность V_x точки x и открытая окрестность W_x множества B, то существуют непересекающиеся открытые окрестности T и U множеств A и B.*

В самом деле, предположим, что лемма доказана; так как E отделимо, то она применима к случаю, когда B одноточечно, и показывает тогда, что E *регулярно*. Снова применяя затем лемму 3 уже к произвольным двум непересекающимся замкнутым множествам в E, убедимся в справедливости аксиомы (O'$_\gamma$).

Для доказательства леммы рассмотрим открытое покрытие пространства E, состоящее из $\complement A$ и указанных в лемме окрестностей V_x, где x пробегает A; пусть $(T_\iota)_{\iota \in I}$ — мажорирующее его локально конечное открытое покрытие; по определению, если $A \cap T_\iota \neq \emptyset$, то существует $x_\iota \in A$ такое, что $T_\iota \subset V_{x_\iota}$. Пусть T — объединение всех T_ι, для которых $A \cap T_\iota \neq \emptyset$, и, значит — открытое множество; покажем, что существует открытая окрестность U множества B, не пересекающая T. В самом деле, каждая точка $y \in B$ обладает открытой окрестностью S_y, пересекающейся лишь с конечным числом множеств T_ι; пусть J — конечное подмножество множества I, образованное теми индексами ι, для которых T_ι пересекает одновременно S_y и A; тогда множество $U_y = S_y \cap \bigcap_{\iota \in J} W_{x_\iota}$ будет открытой окрестностью точки y, не пересекающей ни одного T_ι, для которого $A \cap T_\iota \neq \emptyset$, и, значит, $U_y \cap T = \emptyset$. Для завершения доказательства остается положить $U = \bigcup_{y \in B} U_y$.

Можно привести примеры нормальных пространств, не являющихся паракомпактными (упражнение 19).

Следствие. *Для каждого открытого покрытия* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ *паракомпактного пространства* E *существует подчиненное ему непрерывное разложение единицы* $(f_\iota)_{\iota\in I}$ *на* E.

В самом деле, пусть $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ — локально конечное открытое покрытие, мажорирующее $(A_\iota)_{\iota\in I}$; тогда существует отображение φ множества L в I такое, что $U_\lambda \subset A_{\varphi(\lambda)}$ для всех $\lambda \in L$. Согласно предложениям 3 и 4 существует непрерывное разложение единицы $(g_\lambda)_{\lambda\in L}$, подчиненное (U_λ); для каждого $\iota \in I$ положим $f_\iota = \sum_{\varphi(\lambda)=\iota} g_\lambda$, где сумма имеет смысл и непрерывна, поскольку носители функций g_λ образуют локально конечное семейство; кроме того, объединение B_ι носителей тех g_λ, для которых $\varphi(\lambda) = \iota$, замкнуто (лемма 2) и содержится в A_ι; поскольку $f_\iota(x) = 0$ при $x \in \complement B_\iota$, носитель функции f_ι содержится в B_ι, а значит и в A_ι. С другой стороны, семейство (B_ι) локально конечно, ибо для каждой точки $x \in E$ имеются ее окрестность V и конечное множество $H \subset L$ такие, что $V \cap U_\lambda = \varnothing$ для всех $\lambda \notin H$, откуда следует, что $V \cap B_\iota = \varnothing$ для всех $\iota \notin \varphi(H)$. Наконец, для всех $x \in E$ имеем

$$1 = \sum_{\lambda\in L} g_\lambda(x) = \sum_{\iota\in I}\Big(\sum_{\varphi(\lambda)=\iota} g_\lambda(x)\Big) = \sum_{\iota\in I} f_\iota(x),$$

чем доказательство следствия и завершается.

Предложение 5. *Всякое замкнутое подпространство* F *паракомпактного пространства* E *паракомпактно.*

В самом деле, F отделимо. С другой стороны, пусть (V_ι) — открытое покрытие пространства F; каждое V_ι имеет вид $V_\iota = U_\iota \cap F$, где U_ι — открытое множество в E. Рассмотрим открытое покрытие $\mathfrak{R}$ пространства E, образованное множеством $\complement F$ и всеми U_ι; существует локально конечное открытое покрытие $\mathfrak{R}'$ пространства E, мажорирующее $\mathfrak{R}$, и следы на F множеств из $\mathfrak{R}'$ образуют локально конечное открытое покрытие пространства F, мажорирующее данное покрытие (V_ι).

Напротив, открытое подпространство компактного пространства может не быть паракомпактным, и даже нормальным (упражнение 26б) и § 5, упражнение 15).

Следствие. *Всякая окрестность замкнутого множества F в паракомпактном пространстве E содержит замкнутую (и, следовательно, паракомпактную) окрестность этого множества.*

Это вытекает из предложений 4 и 5 и аксиомы (O''_V).

Предложение 6. *Произведение паракомпактного пространства и компактного пространства паракомпактно.*

Пусть E — паракомпактное пространство, K — компактное пространство и $\mathfrak{R}$ — открытое покрытие их произведения. Для каждой точки $(x, y) \in E \times K$ существуют открытая окрестность $V_{x,y}$ точки x в E и открытая окрестность $W_{x,y}$ точки y в K, произведение которых $V_{x,y} \times W_{x,y}$ содержится в некотором множестве из $\mathfrak{R}$. Для каждого $x \in E$ множества $W_{x,y}$, где y пробегает K, образуют открытое покрытие пространства K; следовательно, в K существует конечное число точек y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ таких, что уже множества W_{x,y_i} образуют открытое покрытие пространства K.

Положим $U_x = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x,y_i}$; каждое из открытых множеств $U_x \times W_{x,y_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ содержится в некотором множестве из $\mathfrak{R}$. Пусть тогда $(T_\iota)_{\iota \in I}$ — локально конечное открытое покрытие пространства E, мажорирующее покрытие, образованное множествами U_x $(x \in E)$, и x_ι для каждого $\iota \in I$ есть точка из E, для которой $T_\iota \subset U_{x_\iota}$; обозначим через $S_{\iota,k}$ множества W_{x_ι,y_k} $(1 \leqslant k \leqslant n_\iota)$, отвечающие этой точке. Ясно, что множества $T_\iota \times S_{\iota,k}$ $(\iota \in I,\ 1 \leqslant k \leqslant n_\iota$ для каждого $\iota \in I)$ образуют открытое покрытие произведения $E \times K$, мажорирующее $\mathfrak{R}$; покажем, что это покрытие локально конечно. В самом деле, для каждой точки $(x, y) \in E \times K$ существует окрестность P точки x, пересекающаяся лишь с конечным числом множеств T_ι; окрестность $P \times K$ точки (x, y) будет тем более пересекаться лишь с конечным числом множеств вида $T_\iota \times S_{\iota,k}$.

Напротив, произведение двух паракомпактных пространств может не быть паракомпактным, и даже нормальным (§ 5, упражнение 16).

5. Паракомпактность метризуемых пространств

Следующая теорема уточняет предложение 2:

Теорема 4. *Всякое метризуемое пространство паракомпактно.*

Эта теорема вытекает из следующих четырех лемм.

Лемма 4. *Пусть* $\mathfrak{R} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ — *открытое покрытие метризуемого пространства* E. *Существует последовательность* $(\mathfrak{S}_n)$, *обладающая следующими свойствами*: 1° *каждое* $\mathfrak{S}_n$ *есть локально конечное семейство открытых множеств из* E; 2° $\mathfrak{S} = \bigcup_n \mathfrak{S}_n$ *является открытым покрытием пространства* E, *мажорирующим* $\mathfrak{R}$.

В самом деле, пусть d — расстояние, согласующееся с топологией пространства E. Для каждого $\alpha \in A$ и каждого целого n обозначим через $F_{n\alpha}$ множество тех точек $x \in U_\alpha$, для которых $d(x, E - U_\alpha) \geqslant 2^{-n}$; так как $E - U_\alpha$ замкнуто, то $U_\alpha = \bigcup_n F_{n\alpha}$. Наделим A структурой вполне упорядоченного множества; пусть $G_{n\alpha}$ для каждого $\alpha \in A$ и каждого целого n означает множество всех точек $x \in F_{n\alpha}$ таких, что $x \notin F_{n+1,\beta}$ для каждого $\beta < \alpha$; наконец, пусть $V_{n\alpha}$ есть множество тех точек $y \in E$, для которых $d(y, G_{n\alpha}) < 2^{-n-3}$. Очевидно, $V_{n\alpha}$ открыто. С другой стороны, так как для каждого $y \in V_{n\alpha}$ существует $x \in G_{n\alpha}$ такое, что $d(x, y) \leqslant 2^{-n-1}$, то $V_{n\alpha} \subset U_\alpha$; поскольку $x \in F_{n\alpha}$, имеем

$$d(y, E - U_\alpha) \geqslant d(x, E - U_\alpha) - d(x, y) \geqslant 2^{-n-1},$$

откуда $y \in U_\alpha$. Обозначим далее для каждого $x \in E$ через α наименьший индекс из A, при котором $x \in U_\alpha$; тогда существует целое n, для которого $x \in F_{n\alpha}$, и из определения α вытекает, что вместе с тем $x \in G_{n\alpha}$, так что $x \in V_{n\alpha}$. Это показывает, что если положить $\mathfrak{S}_n = (V_{n\alpha})_{\alpha \in A}$, то $\mathfrak{S} = \bigcup_n \mathfrak{S}_n$ будет открытым покрытием пространства E, мажорирующим $\mathfrak{R}$. Остается доказать, что каждое семейство $\mathfrak{S}_n$ *локально конечно*. Для этого покажем сначала, что $d(G_{n\alpha}, G_{n\beta}) \geqslant 2^{-n-1}$ при $\alpha \neq \beta$. В самом деле, предположим,

что $\beta < \alpha$; пусть $x \in G_{n\alpha}$ и $y \in F_{n\beta}$; по определению $x \notin F_{n+1,\beta}$; следовательно, $d(x, E - U_\beta) < 2^{-n-1}$ и $d(y, E - U_\beta) \geqslant 2^{-n}$, откуда $d(x, y) \geqslant 2^{-n-1}$; поскольку $G_{n\beta} \subset F_{n\beta}$, заключаем, что

$$d(G_{n\alpha}, G_{n\beta}) \geqslant 2^{-n-1}.$$

Из определения множеств $V_{n\alpha}$ и $V_{n\beta}$ сразу видно теперь, что $d(V_{n\alpha}, V_{n\beta}) \geqslant 2^{-n-2}$. Из этого последнего неравенства вытекает, что открытый шар радиуса 2^{-n-3} с центром в любой точке $z \in E$ может пересекаться не более чем с одним из множеств семейства $\mathfrak{S}_n$, и тем самым — что это семейство локально конечно.

Лемма 5. *Пусть* $(\mathfrak{S}_n)$ — *последовательность локально конечных семейств открытых подмножеств топологического пространства* E *и* $\mathfrak{S} = \bigcup_n \mathfrak{S}_n$ — *покрытие пространства* E. *Тогда существует локально конечное* (*не обязательно открытое*) *покрытие* $\mathfrak{V}$ *пространства* E, *мажорирующее* $\mathfrak{S}$.

В самом деле, пусть E_n — открытое множество в E, являющееся объединением всех множеств из $\mathfrak{S}_n$; положим $U_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ и $A_n = U_n - U_{n-1}$ ($U_0 = \varnothing$). Покажем, что множества $V \cap A_n$, где n — произвольные целые, а $V \in \mathfrak{S}_n$, образуют требуемое покрытие $\mathfrak{V}$. Поскольку множества A_n образуют покрытие пространства E, для каждого $x \in E$ существует целое n такое, что $x \in A_n$; тогда $x \in E_n$ и существует $V \in \mathfrak{S}_n$ такое, что $x \in V$; таким образом, $x \in V \cap A_n$ и совокупность $\mathfrak{V}$ всех множеств $V \cap A_n$ является покрытием пространства E. Очевидно, оно мажорирует $\mathfrak{S}$. С другой стороны, для каждого $x \in E$ существует целое n такое, что $x \in U_n$; так как U_n открыто, а $\mathfrak{S}_m$ — локально конечные семейства, то для каждого m существует окрестность W_m точки x, содержащаяся в U_n и пересекающаяся лишь с конечным числом множеств из $\mathfrak{S}_m$; тогда окрестность $W = \bigcap_{m=1}^{n} W_m$ точки x будет пересекаться лишь с конечным числом множеств из $\mathfrak{V}$, поскольку $W \cap A_p = \varnothing$ для $p > n$. Это показывает, что $\mathfrak{V}$ локально конечно, и завершает доказательство леммы.

Лемма 6. *Пусть* E — *регулярное пространство, обладающее тем свойством, что для каждого его открытого покрытия* $\mathfrak{R}$ *суще-*

ствует локально конечное (не обязательно открытое) покрытие, мажорирующее $\mathfrak{R}$. *Тогда для каждого открытого покрытия* $\mathfrak{R}$ *пространства* E *существует локально конечное замкнутое покрытие* $\mathfrak{F}$, *мажорирующее* $\mathfrak{R}$.

В самом деле, пусть $\mathfrak{R}$ — открытое покрытие E. Для каждого $x \in E$ существует открытое множество $U \in \mathfrak{R}$, содержащее x, а значит, поскольку E регулярно,— открытая окрестность V_x точки x такая, что $\overline{V}_x \subset U$. Множество $\mathfrak{V}$ всех V_x является открытым покрытием пространства E и, следовательно, по предположению, существует локально конечное покрытие $\mathfrak{V}$, мажорирующее $\mathfrak{V}$; пусть $\mathfrak{F}$ — совокупность замыканий множеств из $\mathfrak{V}$. Так как покрытие $\mathfrak{V}'$, образованное множествами $\overline{V}_x$, мажорирует $\mathfrak{R}$, а $\mathfrak{F}$ мажорирует $\mathfrak{V}'$, то $\mathfrak{F}$ есть замкнутое покрытие, мажорирующее $\mathfrak{R}$. С другой стороны, $\mathfrak{F}$ локально конечно, ибо если некоторое открытое множество не пересекается с множеством $B \in \mathfrak{V}$, то оно не пересекается также с его замыканием $\overline{B}$.

Лемма 7. *Пусть* E — *отделимое пространство, обладающее тем свойством, что для каждого его открытого покрытия* $\mathfrak{R}$ *существует локально конечное замкнутое покрытие* $\mathfrak{F}$, *мажорирующее* $\mathfrak{R}$. *Тогда* E *паракомпактно.*

Пусть $\mathfrak{R}$ — открытое покрытие пространства E; требуется доказать существование локально конечного открытого покрытия пространства E, мажорирующего $\mathfrak{R}$. Пусть $\mathfrak{A}$ — локально конечное покрытие пространства E (замкнутое или нет), мажорирующее $\mathfrak{R}$, и W_x для каждой точки $x \in E$ ее открытая окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом множеств из $\mathfrak{A}$. Множество $\mathfrak{W}$ всех W_x является открытым покрытием пространства E; пусть $\mathfrak{F}$ — локально конечное *замкнутое* покрытие пространства E, мажорирующее $\mathfrak{W}$, далее U_A для каждого $A \in \mathfrak{A}$ — множество из $\mathfrak{R}$, содержащее A, и C_A — объединение всех множеств $F \in \mathfrak{F}$, для которых $A \cap F = \varnothing$. Поскольку $\mathfrak{F}$ локально конечно, C_A замкнуто в E (лемма 2) и, следовательно, $A' = U_A \cap (E - C_A)$ открыто. Так как $A \cap C_A = \varnothing$ и $A \subset U_A$, то $A \subset A'$, и множество $\mathfrak{A}'$ всех A' при A, пробегающем $\mathfrak{A}$, является открытым покрытием пространства E; при этом, поскольку $A' \subset U_A \in \mathfrak{R}$, $\mathfrak{A}'$ мажорирует $\mathfrak{R}$. Остается показать, что $\mathfrak{A}'$ *локально конечно*. Каждая точка $x \in E$ обладает окрестностью T,

пересекающейся лишь с конечным числом множеств из $\mathfrak{F}$; пусть F_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — эти множества. Поскольку F_i содержится в некотором множестве вида W_{ν_i}, оно, по определению, пересекается лишь с конечным числом множеств из $\mathfrak{A}$; пусть A_{ij} — эти последние $(1 \leqslant j \leqslant s_i)$. Если A — множество из $\mathfrak{A}$, отличное от всех A_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant s_i)$, то, как следует из определений, A^c не пересекается ни с одним из F_i и потому не пересекается с $T \subset \bigcup_{i=1}^{n} F_i$. Этим доказательство завершается.

Упражнения

1) а) Топологическое пространство, удовлетворяющее аксиомам (Q) (гл. I, 2-е изд., § 6, упражнение 5; 3-е изд., § 8, упражнение 1) и (O_V), нормально.

б) Построить топологическое пространство, состоящее из четырех точек, удовлетворяющее аксиоме (O_V), но не удовлетворяющее аксиоме (O_{III}).

в) Для того чтобы топологическое пространство E, удовлетворяющее аксиоме (O_V), удовлетворяло также аксиоме (O_{III}), необходимо и достаточно, чтобы оно обладало следующим свойством: всякое замкнутое множество в E является пересечением своих окрестностей. Тогда E равномеризуемо, а вполне регулярное пространство, ассоциированное с E (§ 1, упражнение 4), нормально.

г) Если топологическое пространство удовлетворяет аксиомам (C) и (O_{III}), то оно удовлетворяет и аксиоме (O_V), а ассоциированное вполне регулярное пространство компактно.

2) Пусть E — топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме (O_V).

а) Показать, что отношение R: $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} \neq \varnothing$ между точками x, y из E равносильно отношению R': «$f(x) = f(y)$ для каждой непрерывной числовой функции f на E», и вывести отсюда, что R есть отношение эквивалентности в E.

б) Показать, что факторпространство $F = E/R$ нормально и что всякая непрерывная числовая функция f на E может быть записана в виде $f = g \circ \varphi$, где g — непрерывная числовая функция на F, а φ — каноническое отображение E на F.

3) В топологическом пространстве E следующие свойства равносильны:

а) всякое подпространство пространства E удовлетворяет аксиоме (O'_V);

б) всякое открытое подпространство пространства E удовлетворяет аксиоме (O'_V);

в) для всякой пары множеств A, B из E таких, что

$$A \cap \overline{B} = B \cap \overline{A} = \varnothing,$$

существуют непересекающиеся открытые множества U, V такие, что $A \subset U$ и $B \subset V$.

Топологическое пространство E называется *вполне нормальным*, если оно отделимо и обладает указанными свойствами. Всякое метризуемое пространство вполне нормально. Компактное пространство не обязательно вполне нормально.

4) Всякое совершенно упорядоченное множество E, наделенное какой-либо из топологий $\mathscr{T}_+(E)$, $\mathscr{T}_-(E)$ (гл. I, 2-е изд., § 1, упражнение 3; 3-е изд., § 2, упражнение 5), вполне нормально. [Пусть A и B — такие множества из E, что $A \cap \overline{B} = B \cap \overline{A} = \varnothing$; определить для каждой точки $x \in A$ ее окрестность V_x и для каждой точки $y \in B$ ее окрестность W_y так, чтобы $V_x \cap W_y = \varnothing$, каковы бы ни были $x \in A$ и $y \in B$.]

*5) Всякое совершенно упорядоченное множество E, наделенное топологией $\mathscr{T}_0(E)$ (гл. I, 2-е изд., § 1, упражнение 3; 3-е изд., § 2, упражнение 5), вполне нормально. [Рассмотреть прежде всего случай, когда E *компактно*; с помощью упражнения 6 § 2 гл. IV показать сначала, что всякое открытое множество в E есть объединение некоторого множества попарно непересекающихся открытых интервалов; использовать этот результат для доказательства высказанного предложения, рассматривая (в обозначениях упражнения 3) дополнение замкнутого множества $\overline{A} \cap \overline{B}$, а затем дополнение множества $\overline{B}$; для перехода к общему случаю с произвольным E использовать упражнение 7 § 4 гл. IV.]

*6) Показать, что в нормальном пространстве E всякое подпространство F, являющееся счетным объединением замкнутых множеств, нормально. [Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые множества в F, а F — объединение возрастающей последовательности (F_n) замкнутых множеств в E. Определить по индукции последовательности (U_n) и (V_n) открытых множеств в E так, чтобы: 1) $\overline{U_n \cap F_n}$ и $\overline{V_n \cap F_n}$ не пересекались; 2) $U \cap F_n$ содержало $A \cap F_n$ и все множества $\overline{U_i \cap F_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, а $V_n \cap F_n$ содержало $B \cap F_n$ и все множества $\overline{V_i \cap F_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.]

7) Топологическое пространство E называется *совершенно нормальным*, если оно нормально и всякое его замкнутое подмножество есть пересечение счетного семейства открытых множеств (или, что то же, всякое открытое множество в E есть объединение счетного семейства замкнутых множеств).

а) Для того чтобы отделимое пространство E было совершенно нормально, необходимо и достаточно, чтобы для каждого его замкну-

того множества A существовала непрерывная числовая функция f на E, для которой $f^{-1}(0) = A$. [Метод упражнения 16а) § 1.]

б) Показать, что всякое совершенно нормальное пространство вполне нормально и что всякое его подпространство совершенно нормально. [Использовать упражнения 3б) и 6.]

в) Всякая полунепрерывная снизу числовая функция на совершенно нормальном пространстве является верхней огибающей некоторой последовательности непрерывных функций. [Метод, использованный в доказательстве предложения 11 § 2.]

г) Компактное пространство E, получаемое присоединением бесконечно удаленной точки к несчетному дискретному пространству, вполне нормально, но не совершенно нормально; всякое его подпространство паракомпактно.

*8) Показать, что неметризуемое компактное пространство E, определенное в упражнении 13а) § 2, совершенно нормально, а неметризуемое компактное пространство F, определенное в упражнении 13г) § 2, вполне нормально, но не совершенно нормально.

*9) а) Пусть E — паракомпактное пространство, каждая точка которого обладает счетной фундаментальной системой окрестностей, и F — полукомпактное нормальное пространство (§ 2, упражнение 14). Показать, что произведение $E \times F$ нормально. [Пусть A и B — непересекающиеся множества, замкнутые в $E \times F$. Рассуждая от противного, показать, что для каждой точки $x \in E$ существуют ее окрестность U_x в E и два открытых множества V_x, W_x в F такие, что $\overline{V}_x \cap \overline{W}_x = \varnothing$ и $A(z) \subset V_x$, $B(z) \subset W_x$ для каждого $z \in U_x$. Пусть $(T_\lambda)_{\lambda \in L}$ — локально конечное открытое покрытие пространства E, мажорирующее $(U_x)_{x \in E}$, и (f^λ) — разложение единицы, подчиненное (T_λ); пусть далее $x(\lambda)$ для каждого $\lambda \in L$ такого, что $T_\lambda \subset U_{x(\lambda)}$, и g_λ — непрерывное отображение F в $[0, 1]$, равное 0 на $\overline{V}_{x(\lambda)}$ и 1 на $\overline{W}_{x(\lambda)}$; рассмотреть на $E \times F$ функцию $\sum_\lambda f_\lambda(x)\, g_\lambda(y)$.]

б) Пусть $F = [a, b[$ — локально компактное пространство, определенное в упражнении 22 § 10 гл. I 2-го изд. (3-е изд., гл. I, § 9, упражнение 12), и $E = [a, b]$ — компактное пространство, полученное присоединением к F бесконечно удаленной точки; F нормально (упражнение 4) и полукомпактно (§ 2, упражнение 15), но произведение $E \times F$ не нормально. [Использовать упражнение 12 § 4 гл. II 2-го изд. (3-е изд., гл. II, § 4, упражнение 4).]

*10) Пусть L — несчетное множество; рассмотрим вполне регулярное пространство $E = \mathbf{N}^L$ (где $\mathbf{N}$ наделено дискретной топологией). Пусть A (соотв. B) — множество, образованное всеми $x = (x(\lambda))_{\lambda \in L}$ из E такими, что для каждого целого $k \neq 0$ (соотв. $k \neq 1$) множество тех $\lambda \in L$, для которых $x(\lambda) = k$, содержит хотя бы один элемент.

а) Показать, что A и B замкнуты и E и не пересекаются.

б) Пусть U и V — открытые множества в E такие, что $A \subset U$, $B \subset V$. Обозначим через Φ совокупность всех элементарных множеств в E (гл. I, 2-е изд., § 8, n° 1; 3-е изд., § 4, n° 1), проекции которых, отличные от N, одноточечны, и $H(W)$ для каждого $W \in \Phi$ означает множество тех $\lambda \in L$, для которых $\mathrm{pr}_\lambda(W)$ одноточечно. Показать, что существуют последовательность (x_n) точек из A, последовательность (U_n) множеств из Φ, последовательность (λ_n) попарно различных элементов из L и строго возрастающая последовательность $(m(n))_{n \in \mathbf{N}}$ целых чисел, обладающие следующими свойствами: 1) $U_n \subset U$ есть окрестность точки x_n; 2) $H(U_n)$ есть множество тех λ_k, для которых $k \leqslant m(n)$; 3) $x_0(\lambda) = 0$ для каждого $\lambda \in L$ и каждого $n > 0$, $x_n(\lambda_k) = k$ для $k \leqslant m(n-1)$ и $x_n(\lambda) = 0$ для остальных $\lambda \in L$.

в) Пусть y — точка из B такая, что $y(\lambda_k) = k$ для каждого целого k и $y(\lambda) = 1$ для всех $\lambda \in L$, отличных от λ_k. Пусть $V_0 \subset V$ — множество из Φ, содержащее y, и n — целое число такое, что $\lambda_k \in L - H(V_0)$ для каждого $k > m(n)$. Показать, что $U_{n+1} \cap V_0 \neq \varnothing$, и вывести отсюда, что E не нормально.

11) Вывести из упражнения 10, что:

а) Если произведение $\prod_{\iota \in I} E_\iota$ отделимых пространств нормально, то E_ι полукомпактны (§ 2, упражнение 14) для всех индексов, кроме не более чем счетного их множества.

б) Для того чтобы произведение $\prod_{\iota \in I} E_\iota$ метризуемых пространств было нормально, необходимо и достаточно, чтобы E_ι были компактны для всех индексов, кроме не более чем счетного их множества; и тогда произведение паракомпактно.

12) Пусть E и F — отделимые пространства.

а) Предположим, что в E существует замкнутое множество A, не являющееся пересечением никакого счетного семейства открытых множеств, а в F существует счетно-бесконечное незамкнутое множество B. Пусть $b \in \overline{B} - B$. Рассмотрим в $E \times F$ множества $C = A \times B$ и $D = (E - A) \times \{b\}$. Показать, что $C \cap \overline{D} = \overline{C} \cap D = \varnothing$, но в $E \times F$ не существует никакой пары (U, V) открытых множеств, для которой бы $C \subset U$, $D \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$.

б) Для того чтобы $E \times F$ было вполне нормально, необходимо, чтобы одно из пространств E, F было совершенно нормально или чтобы в одном из пространств E, F всякое счетно-бесконечное множество было замкнуто (см. § 5, упражнение 16).

в) Пусть $E = [a, b]$ — несчетное вполне упорядоченное множество такое, что $[a, x[$ счетно при всяком $x < b$. Наделим E топологией, в которой $\{x\}$ открыто для каждого $x < b$, а интервалы $]x, b]$ (где

$x < b$) образуют фундаментальную систему окрестностей точки b. Показать, что $E \times E$ вполне нормально, но E не совершенно нормально.

г) Показать, что всякое компактное пространство E, для которого $E \times E \times E$ вполне нормально, метризуемо. [Использовать теорему 1 § 2.]

*13) Пусть $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — *несчетное* семейство отделимых топологических пространств, каждое из которых имеет по крайней мере две различные точки. Пусть такими точками в E_ι для каждого ι из I будут a_ι, b_ι, и F — подпространство пространства $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$, образованное теми точками $(x_\iota)_{\iota \in I}$, у которых $x_\iota = a_\iota$ для всех индексов, кроме не более чем *счетного* их множества; пусть b — точка (b_ι) из E.

Рассмотрим в произведении $E \times F$ диагональ A множества $F \times F$ и множество $B = \{b\} \times F$. Показать, что A и B замкнуты и в $E \times F$ не существует никакой пары открытых множеств U, V, для которой $A \subset U$, $B \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. [Пусть U и V — открытые множества такие, что $A \subset U$ и $B \subset V$; показать, что существует возрастающая последовательность (H_n) не более чем счетных подмножеств множества I такая, что если x_n есть точка из F, у которой каждая координата с индексами $\iota \in H_n$ равна b_ι, а каждая координата с индексами $\iota \notin H_n$ равна a_ι, то точка (x_{n+1}, x_n) принадлежит V для каждого целого n; доказать, что последовательность (x_{n+1}, x_n) стремится к некоторой точке из A, и вывести отсюда, что $U \cap V \neq \varnothing$.]

Получить с помощью этого результата пример связного топологического кольца, которое не являлось бы нормальным.

Вывести также, что произведение несчетного семейства отделимых топологических пространств, каждое из которых имеет по крайней мере две различные точки, не может быть вполне нормально. [Использовать предыдущий результат для случая, когда все E_ι совпадают с дискретным двухточечным пространством.]

14) Пусть E — отделимое не нормальное пространство, A и B — непересекающиеся замкнутые множества из E, для которых не существует непересекающихся открытых множеств U, V, удовлетворяющих отношениям $A \subset U$, $B \subset V$, и R — отношение эквивалентности в E, классами эквивалентности которого служат множество A, множество B и множества $\{x\}$, где x пробегает $\mathbf{C}(A \cup B)$. Показать, что график отношения R в $E \times E$ замкнут и отношение R замкнуто, но факторпространство E/R неотделимо (см. гл. I, 2-е изд., § 9, теорема 2; 3-е изд., § 8, предложение 8).

15) а) Пусть E — нормальное пространство и R — замкнутое отношение эквивалентности в E. Показать, что факторпространство E/R нормально. [Использовать предложение 7 § 9 гл. I, 2-го изд. (3-е изд., гл. I, § 5, предложение 10).]

б) Пусть E — локально компактное пространство, счетное в бесконечности, и R — отношение эквивалентности в E, график которого замкнут в $E \times E$. Показать, что E/R нормально. [См. гл. I, 2-е изд., § 10, упражнение 15 (3-е изд., § 10, упражнение 19).]

в) Пусть E — дополнение в $\mathbf{R}$ множества точек вида $1/n$, где n пробегает все целые числа, отличные от 0 и ± 1. Рассмотрим в метризуемом пространстве E отношение эквивалентности R, класс которого для каждого не целого $x \in E$ состоит из точек x и $1/x$, а класс каждого целого x — только из x. Показать, что R открыто и имеет замкнутый график в $E \times E$, но E/R не регулярно.

16) Для каждого покрытия $\mathfrak{R}$ топологического пространства E обозначим через $V_{\mathfrak{R}}$ объединение множеств $U \times U$, где U пробегает $\mathfrak{R}$. Открытое покрытие $\mathfrak{R}$ пространства E называется *однообразным*, если в произведении $E \times E$ существует окрестность W диагонали Δ такая, что покрытие, образованное множествами $W(x)$, где x пробегает E, мажорирует $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{R}$ называется *делимым*, если в $E \times E$ существует окрестность W диагонали Δ такая, что $\overset{2}{W} \subset V_{\mathfrak{R}}$.

а) Показать, что всякое однообразное открытое покрытие пространства E делимо (см. упражнение 19б)).

б) Пусть $\mathfrak{R}$ — открытое покрытие пространства E, мажорируемое некоторым замкнутым локально конечным покрытием $\mathfrak{S}$ этого пространства. Показать, что $\mathfrak{R}$ однообразно. [Пусть U_A для каждого $A \in \mathfrak{S}$ есть некоторое множество из $\mathfrak{R}$, содержащее A, и V_A — объединение открытых подмножеств $U_A \times U_A$ и $(E - A) \times (E - A)$ пространства $E \times E$; рассмотреть множество $W = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} V_A$.]

*17) а) Для того чтобы всякое конечное открытое покрытие топологического пространства E было делимо (упражнение 16), необходимо, чтобы E удовлетворяло аксиоме (O'_V). [Рассмотреть *бинарное* (т. е. состоящее из двух множеств) открытое покрытие пространства E.] Обратно, если E удовлетворяет аксиоме (O'_V), то всякое его конечное открытое покрытие однообразно. [Использовать теорему 3 (которая применима, поскольку E удовлетворяет (O'_V)) для сведения к случаю бинарного покрытия и затем для исследования этого случая.] Когда $\mathfrak{R}$ пробегает всевозможные конечные открытые покрытия пространства E, множества $V_{\mathfrak{R}}$ образуют фундаментальную систему окружений некоторой равномерной структуры в E, согласующейся с его топологией и называемой «равномерной структурой конечных открытых покрытий».

б) Пусть E нормально; показать, что равномерная структура $\mathcal{U}$ конечных открытых покрытий совпадает со слабейшей равномерной структурой $\mathcal{U}'$, для которой равномерно непрерывны непрерывные

отображения E в $[0, 1]$ (т. е. с равномерной структурой, индуцируемой в E из его компактификации Стоуна — Чеха (§ 1, упражнение 7). [Чтобы убедиться в том, что $\mathscr{U}'$ мажорирует $\mathscr{U}$, образовать с помощью теоремы 3 и аксиомы (Oγ) конечное семейство отклонений на E вида $(x, y) \mapsto |f(x) - f(y)|$ так, чтобы всякое окружение равномерной структуры, определенной этими отклонениями, содержалось в некотором окружении равномерной структуры $\mathscr{U}$.]

в) Пусть E — нормальное пространство, $\widetilde{E}$ — его компактификация Стоуна — Чеха и $\overline{F}$ для каждого замкнутого множества F из E — его замыкание в $\widetilde{E}$. Показать, что непрерывное отображение компактификации Стоуна — Чеха $\widetilde{F}$ пространства F в $\overline{F}$, продолжающее тождественное отображение F в себя, является гомеоморфизмом. [Использовать б) или непосредственно теорему 2 и универсальное свойство пространства $\widetilde{F}$.] Показать, что, каковы бы ни были замкнутые множества F, G в E, $\overline{F \cap G} = \overline{F} \cap \overline{G}$ в $\widetilde{E}$. [Предполагая, что $x_0 \notin \overline{F \cap G}$ и $x_0 \in \overline{F}$, рассмотреть замкнутую окрестность V точки x_0 в $\widetilde{E}$, для которой $V \cap F$ и G — непересекающиеся замкнутые множества в E.]

*18) Семейство (A_α) подмножеств топологического пространства E называется *дискретным*, если каждая точка $x \in E$ обладает окрестностью, пересекающейся не более чем с одним из множеств A_α. Отделимое пространство E называется *коллективно нормальным*, если для каждого дискретного семейства (A_α) замкнутых множеств в E существует семейство (U_α) попарно непересекающихся открытых множеств таких, что $A_\alpha \subset U_\alpha$ для всех α. Всякое коллективно нормальное пространство нормально.

а) Для того чтобы каждое открытое покрытие вполне регулярного пространства E было делимо (упражнение 16), необходимо и достаточно, чтобы множество всех окрестностей диагонали Δ в $E \times E$ было фильтром окружений универсальной равномерной структуры в E (§ 1, упражнение 5). Показать, что если это условие выполнено, то E коллективно нормально. [Пусть (A_α) — дискретное семейство замкнутых множеств в E; рассмотреть открытое покрытие (V_α), где $V_\alpha = E - \bigcup_{\beta \neq \alpha} A_\beta$ для каждого α.]

б) Пусть $F = [a, b[$ — локально компактное пространство, определенное в упражнении 22 § 10 гл. I 2-го изд. (3-е изд., гл. I, § 9, упражнение 12), F_0 — множество F, наделенное дискретной топологией, и G — множество $F_0 \cup \{b\}$, наделенное топологией, в которой каждая точка из F_0 образует открытое множество, а множества $]x, b]$, где x пробегает F_0, образуют фундаментальную систему окрестностей точки b. Показать, что пространство $E = F \times G$ коллективно нормально. [Заметить, что в F нет бесконечных дискретных семейств подмножеств, и использовать упражнение 4.] Пусть $\mathfrak{R}$ — открытое

покрытие пространства E, состоящее из $F \times F_0$ и произведений $[a, x] \times]x, b]$ $(x < b)$; показать, что $\mathfrak{R}$ не делимо и, следовательно, множество всех окрестностей диагонали Δ в $E \times E$ не является фильтром окружений никакой равномерной структуры в E. [Использовать упражнение 22а) § 10 гл. I 2-го изд. (3-е изд., § 9, упражнение 12б)).]

*19) а) Для того чтобы регулярное пространство E было паракомпактно, необходимо и достаточно, чтобы всякое его открытое покрытие было однообразным (упражнение 16). [Для доказательства необходимости использовать лемму 6 и упражнение 16б). Для доказательства достаточности использовать упражнение 16а) § 4, предложение 2 § 1 и теорему 4 § 4.]

б) Дать пример делимого не однообразного покрытия коллективно нормального, но не паракомпактного пространства. [Использовать а) и упражнение 12 § 4 гл. II 2-го изд. (3-е изд., § 4, упражнение 4).]

в) Показать, что паракомпактное пространство E полно в своей универсальной равномерной структуре (§ 1, упражнение 5). [Если фильтр Коши $\mathfrak{F}$ относительно этой структуры не имеет точки прикосновения, то всякая точка $x \in E$ имеет открытую окрестность V_x, не пересекающуюся хотя бы с одним множеством из $\mathfrak{F}$. Использовать затем а) и упражнение 18а).]

20) а) Для того чтобы регулярное пространство E было паракомпактно, достаточно, чтобы для каждого его открытого покрытия $\mathfrak{R}$ существовала последовательность $(\mathfrak{S}_n)$ локально конечных семейств, для которой $\mathfrak{S} = \bigcup_n \mathfrak{S}_n$ являлось бы открытым покрытием пространства E, мажорирующим $\mathfrak{R}$. [См. леммы 5, 6 и 7.]

б) Вывести из а), что в паракомпактном пространстве объединение всякого счетного семейства замкнутых множеств есть паракомпактное подпространство (см. § 5, упражнение 15).

в) Пусть E — регулярное пространство и $\mathfrak{F}$ — локально конечное семейство замкнутых множеств, являющихся паракомпактными подпространствами пространства E. Показать, что объединение всех множеств из $\mathfrak{F}$ есть паракомпактное подпространство пространства E. [Использовать лемму 7. См. § 5, упражнение 15.]

г) Показать, что произведение паракомпактного пространства E и регулярного пространства F, являющегося объединением счетного семейства своих компактных подмножеств, паракомпактно. [Погрузить F в его компактификацию Стоуна — Чеха и использовать б). См. § 5, упражнение 16.]

*21) а) Пусть E — паракомпактное пространство и R — замкнутое отношение эквивалентности в E такое, что всякий класс эквивалентности по R компактен. Показать, что E/R паракомпактно. [Использовать упражнение 15а), теорему 3 и лемму 7. См. упражнение 15в).]

б) Пусть E — отделимое пространство и R — замкнутое отношение эквивалентности в E такое, что всякий класс эквивалентности по R компактен. Показать, что если E/R паракомпактно, то E паракомпактно. [Рассуждать, как в доказательстве предложения 6.]

в) Пусть F — не паракомпактное локально компактное пространство (см. гл. I, 2-е изд., § 10, упражнение 22; 3-е изд., § 9, упражнение 12), F_0 — компактное пространство, полученное присоединением к F бесконечно удаленной точки, E — топологическая сумма пространств F и F_0, R — отношение эквивалентности, отождествляющее всякую точку из F с ее каноническим образом в F_0. Показать, что отношение R открыто, всякий класс эквивалентности по R содержит не более двух точек, а E/R гомеоморфно F_0 и, следовательно, компактно.

*22) Для того чтобы регулярное пространство E было метризуемо, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовала последовательность $(\mathfrak{B}_n)$ локально конечных семейств открытых множеств такая, что $\mathfrak{B} = \bigcup_n \mathfrak{B}_n$ — базис его топологии. [Для доказательства необходимости условия воспользоваться леммой 4. Для доказательства достаточности показать сначала с помощью лемм 5, 6 и 7, что E паракомпактно. Для каждой пары m, n целых чисел и каждого $U \in \mathfrak{B}_m$ обозначим через U' объединение множеств $V \in \mathfrak{B}_n$ таких, что $\overline{V} \subset U$; показать, что $\overline{U'} \subset U$. Пусть f_U — непрерывное отображение E в $[0, 1]$, равное 0 на $E - U$ и 1 на U', и

$$d_{mn}(x, y) = \sum_{U \in \mathfrak{B}_m} |f_U(x) - f_U(y)|;$$

показать, что отклонения d_{mn} определяют топологию в E.] (*Теорема Нагата — Смирнова*). В частности, всякое регулярное пространство со счетным базисом метризуемо.

23) Топологическое пространство E называют *линделефовским*, если всякое его открытое покрытие содержит счетное подпокрытие. Всякое пространство, обладающее счетным базисом, линделефовское; всякое квазикомпактное пространство (гл. I, 2-е изд., § 10, упражнение 23; 3-е изд., § 9, n° 1) линделефовское.

а) Всякое замкнутое подпространство линделефовского пространства есть линделефовское пространство. Для каждого непрерывного отображения f линделефовского пространства E в топологическое пространство E' подпространство $f(E)$ последнего — линделефовское.

б) Всякое отделимое пространство, являющееся объединением счетного семейства компактных множеств,— линделефовское.

в) Всякое регулярное линделефовское пространство паракомпактно. [Использовать упражнение 20а).]

г) Произведение линделефовского пространства и компактного пространства есть линделефовское пространство. [Рассуждать, как при доказательстве предложения 6; см. § 5, упражнение 16.]

*24) а) Пусть E — метризуемое пространство, R — замкнутое отношение эквивалентности в E такое, что всякий класс эквивалентности по R компактен. Показать, что E/R метризуемо. [С помощью теоремы Нагата — Смирнова (упражнение 22) доказать аналог леммы 4 для открытых покрытий пространства E, состоящих из *насыщенных* по R множеств; принять за $F_{n\alpha}$ наибольшее насыщенное открытое множество, содержащееся в множестве тех $x \in E$, для которых $d(x, E - U_\alpha) > 2^{-n}$, за $F'_{n\alpha}$ — насыщенные множества тех $x \in E$, для которых $d(x, E - U_\alpha) \geqslant 2^{-n}$, и за $G_{n\alpha}$ — множество тех $x \in F_{n\alpha}$, для которых $x \notin F'_{n+1,\beta}$ при всех $\beta < \alpha$.]

б) Распространить результат пункта а) на случай, когда R замкнуто, а каждая точка пространства E/R обладает счетной фундаментальной системой окрестностей. [Использовать упражнение 20б) § 2.]

в) Пусть E — топологическое пространство и (F_α) — его замкнутое локально конечное покрытие. Показать, что если каждое из подпространств F_α метризуемо, то E метризуемо. [Рассмотреть E как факторпространство топологической суммы всех F_α.]

г) Паракомпактное пространство, всякая точка которого обладает метризуемой окрестностью, метризуемо. [Применить в); см. гл. I, 2-е изд., § 10, упражнение 22б) (3-е изд., § 9, упражнение 12в)). См. упражнение 25г) и § 2, упражнение 15, а также § 5, упражнение 15.]

25) Отделимое пространство E называется *метакомпактным*, если для всякого его открытого покрытия $\mathfrak{A}$ существует мажорирующее $\mathfrak{A}$ точечно конечное открытое покрытие.

а) Показать, что всякое замкнутое подпространство метакомпактного пространства метакомпактно; если всякое открытое подпространство метакомпактного пространства метакомпактно, то и все вообще подпространства метакомпактны.

б) Пусть E — отделимое пространство и R — замкнутое отношение эквивалентности в E такое, что всякий класс эквивалентности по R компактен. Показать, что если E/R метакомпактно, то E метакомпактно. [Рассуждать, как в упражнении 21б).]

в) Показать, что пространство, одновременно метакомпактное и полукомпактное (§ 2, упражнение 14), компактно. [Заметить с помощью теоремы Цорна, что всякое точечно конечное открытое покрытие содержит минимальное открытое покрытие, и использовать упражнение 14а) § 2.]

г) Вполне нормальное локально компактное пространство $E = [a, b[$, определенное в упражнении 22 § 10 гл. I 2-го изд. (3-е изд., гл. I, § 9, упражнение 12), не метакомпактно *).

*) Существуют совершенно нормальные коллективно нормальные пространства, не являющиеся метакомпактными, и совершенно нормальные метакомпактные пространства, не являющиеся коллективно нормальными (а следовательно, не паракомпактные). См. E. Michael, *Can. Journ. of Math.*, VII (1955), стр. 275—279.

д) Пусть F — метризуемое пространство, A — его подмножество, которое, как и его дополнение, всюду плотно в F, и E — не регулярное пространство, получаемое путем наделения F топологией, порождаемой всеми открытыми множествами из F и множеством A. Показать, что E метакомпактно. [Рассмотреть для каждой точки $x \in E$ ее окрестность V_x, содержащуюся в каком-либо множестве заданного открытого покрытия $\mathfrak{R}$ пространства E и удовлетворяющую следующим условиям: $V_x \subset A$, если $x \in A$, и V_x есть окрестность x в F, если $x \notin A$. Заметить, что подпространство A пространства E паракомпактно, так же как подпространство пространства F, получаемое объединением всех V_x для $x \notin A$.]

26) а) Показать, что всякое вейерштрассово (§ 1, упражнение 22) нормальное пространство полукомпактно (§ 2, упражнение 14). [Показать, что если последовательность (x_n) попарно различных точек из E не имеет предельных точек, то на E существует непрерывная конечная числовая функция f такая, что $f(x_n) = n$ для всех n.]

б) Пусть $F = [a, b[$ — локально компактное пространство, определенное в упражнении 22 § 10 гл. I 2-го изд. (3-е изд., § 9, упражнение 12), и F_0 — компактное пространство, получаемое присоединением к F бесконечно удаленной точки,— ее можно отождествить с b. Пусть далее c — наименьший элемент в F, для которого $[a, c[$ бесконечно, и G — компактное подпространство $[a, c]$ пространства F. Пусть, наконец, E — дополнение к точке (b, c) в компактном пространстве $F_0 \times G$. Показать, что E — не нормальное локально компактное пространство (см. упражнение 12а)) и что оно вейерштрассово, но не полукомпактно. Дать пример замкнутого подпространства в E, которое не было бы вейерштрассовым. Дать пример полунепрерывной снизу функции на E, не достигающей своей нижней грани. [См. § 2, упражнение 14и).]

27) Топологическое пространство E называется *локально паракомпактным*, если всякая его точка обладает *замкнутой* окрестностью, являющейся паракомпактным подпространством.

а) Показать, что локально паракомпактное пространство вполне регулярно.

б) Пусть в компактном пространстве $F_0 \times G$, определенном в упражнении 26б), H означает дополнение к множеству тех точек (b, y), у которых $y < c$. Показать, что H не локально паракомпактное нормальное пространство. [См. гл. I, 2-е изд., § 10, упражнение 22б); 3-е изд., § 9, упражнение 12в).]

в) Пусть E — топологическое пространство и Φ — его покрытие, образованное замкнутыми паракомпактными подпространствами и такое, что всякое $A \in \Phi$ обладает в E окрестностью, принадлежащей Φ. Пусть E' — множество, полученное присоединением к E точки ω; определим в E' топологию, приняв за фундаментальную систему окрестностей точки $x \in E$ в E' множество всех ее окрестностей в E, а за фун-

даментальную систему окрестностей точки ω — базис фильтра, порожденный дополнениями в E' множеств из Φ (см. упражнение 20в)). Показать, что E' — паракомпактное пространство.

*28) Пусть E — метрическое пространство, d — его расстояние, A — замкнутое множество в E и f — непрерывная числовая функция, определенная на A, со значениями в интервале $[1, 2]$. Показать, что числовая функция g, определенная на E условиями $g(x) = f(x)$ на A и

$$g(x) = \frac{1}{d(x, A)} \inf_{y \in A} (f(y)\, d(x, y))$$

на $\complement A$, непрерывна на E. Получить отсюда доказательство теоремы 2 для метрических пространств.

29) *Для того чтобы отделимое топологическое пространство E* было нормально, необходимо и достаточно, чтобы для каждого его замкнутого подмножества A и каждой числовой функции f на A, непрерывной в индуцированной топологии, существовало непрерывное отклонение d на E, относительно которого f была бы равномерно непрерывна. [Для доказательства достаточности, следует показать, что всякая числовая функция f на замкнутом множестве A, непрерывная в индуцированной топологии, может быть продолжена до непрерывной функции на E; рассмотреть для этого отделимое пространство $\overline{E}$, ассоциированное с равномерной структурой, определяемой в E отклонением d.]

30) Пусть E — нормальное пространство и g — полунепрерывная сверху, а f — полунепрерывная снизу функции на E такие, что $g \leqslant f$. Показать, что на E существует непрерывная числовая функция h такая, что $g \leqslant h \leqslant f$. [Ограничиться случаем, когда f и g принимают значения в $[0, 1]$. Для каждой двоичной дроби $r \in [0, 1]$ обозначим через $F(r)$ множество тех $x \in E$, для которых $f(x) \leqslant r$, и через $G(r)$ — множество тех $x \in E$, для которых $g(x) < r$. Действуя, как при доказательстве теоремы 1, определить по индукции семейство открытых множеств $U(r)$ (где r пробегает множество всех двоичных дробей из интервала $[0, 1]$) так, чтобы при $r < r'$ выполнялись условия $F(r) \subset U(r')$, $\overline{U(r)} \subset U(r')$ и $\overline{U(r)} \subset G(r')$; завершить затем доказательство, как в случае теоремы 1.]

§ 5. Бэровские пространства

1. *Разреженные множества*

Определение 1. *Подмножество A топологического пространства E называется разреженным, если его замыкание не имеет внутренних точек* *).

*) В русской математической литературе такие множества называют нигде не плотными.— *Ред.*

То же самое можно выразить, сказав, что *внешность* множества A *всюду плотна* в E.

Для того чтобы *замкнутое* множество A было разреженным, необходимо и достаточно, чтобы оно не имело внутренних точек, или, что то же, чтобы оно *совпадало со своей границей*. Для того чтобы произвольное множество было разреженным, необходимо и достаточно, чтобы его замыкание было разреженным. Всякое подмножество разреженного множества является разреженным множеством.

Примеры. 1) Пустое множество в E — разреженное. Для того чтобы одноточечное множество в отделимом пространстве было разреженным, необходимо и достаточно, чтобы образующая его точка не была изолированной в E. В непустом пространстве никакое всюду плотное множество не является разреженным.

2) Граница *замкнутого* или *открытого* множества всегда есть разреженное множество.

3) В числовом пространстве $\mathbf{R}^n$ *всякое* аффинное линейное многообразие размерности $p < n$ есть разреженное множество (см. гл. VI, § 1, предложение 2).

Замечание. Граница *произвольного* множества не обязана быть разреженным множеством; например, если A и $\complement A$ оба всюду плотны, то граница множества A совпадает со всем пространством E.

Предложение 1. *Объединение конечного числа разреженных множеств есть разреженное множество.*

Достаточно доказать, что объединение двух разреженных множеств A, B есть разреженное множество, причем можно ограничиться случаем, когда A и B *замкнуты*. Утверждение равносильно тогда тому, что пересечение всюду плотных открытых множеств $\complement A$, $\complement B$ всюду плотно. Но если U — непустое открытое множество, то $U \cap \complement A$ открыто и не пусто, а следовательно, и $U \cap (\complement A \cap \complement B) = (U \cap \complement A) \cap \complement B$ есть непустое открытое множество.

Пусть F — подпространство топологического пространства E. Множество $A \subset F$ называется *разреженным относительно* F, если A, как множество в топологическом пространстве F, разреженное.

Предложение 2. *Пусть F — подпространство пространства E и $A \subset F$; если A разреженно относительно F, то A разре-*

жено относительно E. Обратно, если F открыто в E и A разрежено относительно E, то A разреженно относительно F.

Пусть A разреженно относительно F; если бы замыкание $\overline{A}$ множества A относительно E содержало непустое открытое множество U, то (по определению замыкания) $U \cap A$ было бы не пусто и, значит, $U \cap F$ — непустым открытым относительно F множеством, содержащимся, в замыкании $\overline{A} \cap F$ множества A относительно F, что противоречит предположению.

Пусть теперь F открыто в E и $A \subset F$ разреженно относительно E; если U — непустое множество, открытое относительно F, то U открыто относительно E и, следовательно, содержит непустое множество V, открытое относительно E (и тем более относительно F) и не пересекающееся с A; это показывает, что A нигде не плотно относительно F.

Вторая часть предложения 2, очевидно, неверна, если F не является открытым в E: чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть случай, когда $F \neq \varnothing$ разреженно относительно E, а $A = F$.

2. *Тощие множества*

Определение 2. *Множество A в топологическом пространстве E называется тощим, если оно является объединением счетного семейства разреженных множеств* *).

То же самое можно выразить, сказав, что A содержится в объединении счетного семейства замкнутых множеств, не имеющих внутренних точек.

Тощее множество вполне может быть *всюду плотным* в E; даже все пространство E может быть тощим множеством.

Примером последнего случая может служить всякое *счетное* отделимое пространство *без изолированных точек*; пространством такого типа является рациональная прямая $\mathbf{Q}$. Впрочем, топологическое пространство E, являющееся в E тощим множеством, не обязательно счетно (см. упражнение 9).

Всякое подмножество тощего множества в пространстве E есть тощее множество; объединение *счетного* семейства тощих множеств есть тощее множество.

*) В русской математической литературе такие множества называют множествами I категории.— *Ред.*

Пусть F — подпространство пространства E; говорят, что множество $A \subset F$ *тощее относительно* F, если при рассмотрении A в топологическом пространстве F оно является тощим множеством. Из предложения 2 (n° 1) вытекает, что если $A \subset F$ есть тощее множество относительно F, то A является тощим относительно E; кроме того, если F *открыто* в E и $A \subset F$ — тощее множество относительно E, то A является тощим множеством относительно F.

3. *Бэровские пространства*

Определение 3. *Топологическое пространство E называется бэровским, если выполняется одно из следующих двух (равносильных) условий:*

(EB) *Пересечение всякого счетного семейства всюду плотных открытых множеств в E всюду плотно в E.*

(EB′) *Объединение всякого счетного семейства замкнутых множеств в E, не имеющих внутренних точек, не имеет внутренних точек.*

Аксиома (EB) может быть высказана еще в двух других равносильных формах:

(EB″) *Всякое непустое открытое множество в E — не тощее.*

В самом деле, для того чтобы множество было тощим, необходимо и достаточно, чтобы оно содержалось в объединении счетного семейства замкнутых множеств без внутренних точек.

(EB‴) *Дополнение тощего множества в E всюду плотно.*

В самом деле, это означает, что ни одно тощее множество не может содержать непустое открытое множество, и, таким образом, равносильно аксиоме (EB″).

Предложение 3. *Всякое непустое открытое подпространство F бэровского пространства E есть бэровское пространство.*

Это вытекает из (EB″), поскольку всякое открытое (соответственно тощее) множество в F открыто (соответственно тощее) в E.

В силу этого предложения всякая точка бэровского пространства обладает фундаментальной системой окрестностей, каждая из которых является бэровским пространством. Обратно:

Предложение 4. *Если всякая точка топологического пространства E обладает окрестностью, являющейся бэровским пространством, то E — бэровское пространство.*

В самом деле, пусть A — непустое открытое множество в E, x — точка из A и V — ее открытая окрестность, являющаяся бэровским пространством; если бы A было тощим в E, то $V \cap A$ было бы одновременно тощим и открытым в V, что противоречит предположению.

Предложение 5. *В бэровском пространстве E дополнение к тощему множеству является бэровским пространством.*

В самом деле, пусть A — тощее множество в E; его дополнение $F = \complement A$ относительно E всюду плотно в E. Пусть B — тощее относительно F множество; оно тощее также относительно E, и, значит, $A \cup B$ тощее относительно E. Следовательно, дополнение к $A \cup B$ относительно E, являющееся также дополнением к B относительно F, всюду плотно в E и, тем более, в F, чем предложение и доказано.

Теорема 1 (Бэр). 1° *Всякое локально компактное пространство E — бэровское.*

2° *Всякое топологическое пространство E, на котором существует расстояние, согласующееся с его топологией и определяющее в E структуру полного метрического пространства, есть бэровское пространство.*

Покажем, что в каждом из двух случаев выполнена аксиома (EB). Пусть (A_n) — последовательность всюду плотных открытых множеств в E и G — произвольное непустое открытое множество. По индукции можно определить последовательность (G_n) непустых открытых множеств таких, что $G_1 = G$ и $\overline{G}_{n+1} \subset G_n \cap A_n$; в самом деле, так как, по предположению, G_n не пусто, то $G_n \cap A_n$ — непустое открытое множество; так как в обоих рассматриваемых случаях E *регулярно*, то существует непустое открытое множество G_{n+1} такое, что $\overline{G}_{n+1} \subset G_n \cap A_n$. Тогда множество $G \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ содержит пересечение всех G_n, а это последнее совпадает с пересечением всех $\overline{G}_n$; остается доказать, что множества $\overline{G}_n$ имеют непустое пересечение. Но если E локально компактно, то можно

предположить, что $\overline{G}_2$ компактно; тогда $\overline{G}_n$ ($n \geqslant 2$) образуют в компактном пространстве $\overline{G}_2$ убывающую последовательность непустых замкнутых множеств, и потому в силу аксиомы (C″) имеют хотя бы одну общую точку. Если же E — полное метрическое пространство (при наделении некоторым расстоянием, согласующимся с его топологией), то множества $\overline{G}_n$ можно выбрать так, чтобы их диаметры (относительно этого расстояния) стремились к 0 при неограниченном возрастании n; эти множества образуют тогда базис фильтра Коши, который сходится к точке, необходимо принадлежащей пересечению всех $\overline{G}_n$.

Замечание. Имеются бэровские пространства, которые не подпадают ни под одну из указанных двух категорий, в частности бэровские пространства, которые ни метризуемы, ни локально компактны (упражнение 16); имеются также метризуемые бэровские пространства, с топологией которых не согласуется никакая структура *полного* метрического пространства (упражнение 14).

4. *Полунепрерывные функции на бэровском пространстве*

Теорема 2. *Пусть E — бэровское пространство и (f_α) — семейство полунепрерывных снизу числовых функций на E, верхняя огибающая $\sup\limits_\alpha f_\alpha(x)$ которого в каждой точке $x \in E$ конечна. При этих условиях всякое непустое открытое множество содержит непустое открытое подмножество, на котором семейство (f_α) равномерно ограниченно.*

Эту теорему можно еще сформулировать, сказав, что точки, в окрестности которых семейство (f_α) равномерно ограниченно, образуют *плотное открытое множество*.

Пусть f — верхняя огибающая $\sup\limits_\alpha f_\alpha$ семейства (f_α); функция f полунепрерывна снизу (гл. IV, § 6, теорема 4) и конечна в каждой точке из E. Таким образом, достаточно провести доказательство для случая, когда семейство (f_α) состоит из одной функции f. Пусть A_n — множество тех точек $x \in E$, для которых $f(x) \leqslant n$; A_n замкнуто (гл. IV, § 6, предложение 1), и из условия теоремы вытекают, что E есть объединение всех A_n; поэтому хотя бы одно из множеств A_n имеет внутреннюю точку и, значит, существует непустое открытое множество, на котором f ограничена (некоторым целым n). Применение этого результата к произвольному непусто-

му открытому подпространству пространства E (являющемуся, согласно предложению 3, бэровским пространством) завершает доказательство теоремы.

Наиболее часто встречающиеся приложения этой теоремы относятся к случаю, когда все f_α *непрерывны* на E.

З а м е ч а н и е. Теорема может оказаться неверной, если не предположить, что E — бэровское пространство. Например, положив $f(p/q) = q$ для каждой несократимой дроби p/q, мы получим на рациональной прямой $\mathbf{Q}$ функцию, полунепрерывную снизу и конечную в каждой точке (см. гл. IV, § 6, n° 2); но в $\mathbf{Q}$ не существует ни одного непустого открытого множества, на котором бы f была ограниченной.

Упражнения

1) а) Показать, что следующие свойства множества X в топологическом пространстве E равносильны: α) граница X разрежена; β) X есть объединение открытого множества и разреженного множества; γ) X есть разность замкнутого множества и разреженного множества.

б) Показать, что если каждая точка множества X в E обладает окрестностью V, для которой $V \cap X$ разрежено в E, то X — разреженное множество в E.

2) Множество X в топологическом пространстве E называется *редким*, если его пересечение $P \cap X$ с каждым совершенным множеством $P \subset E$ разрежено относительно P.

а) Показать, что объединение всякого конечного семейства редких множеств есть редкое множество.

б) Показать, что граница редкого множества есть разреженное множество.

в) В E существует наибольшее совершенное множество с редким дополнением.

*3) Пусть X — множество в топологическом пространстве E; обозначим через $D(X)$ множество тех точек из E, для любой окрестности V которых множество $V \cap X$ не тощее. $D(X) \subset \overline{X}$.

а) Показать, что если $D(Y) = \varnothing$, то $D(X \cup Y) = D(X)$ для каждого $X \subset E$.

б) Для того чтобы $D(X) = \varnothing$, необходимо и достаточно, чтобы X было тощим множеством. [Начать с доказательства того, что если (A_ι) — семейство попарно непересекающихся открытых множеств в E, а B_ι для каждого ι — разреженное относительно E множество, содержащееся в A_ι, то $\bigcup_\iota B_\iota$ — разреженное множество. Рассмотреть затем *максимальное* множество $\mathfrak{M}$ попарно непересекающихся открытых множеств $: E$ таких, что $X \cap A$ для каждого $A \in \mathfrak{M}$ — тощее множество; существование такого максимального множества устанавливается с помощью теоремы Цорна. Показать, наконец, что если

$D(X) = \varnothing$, то $X \cap \mathbf{C}G$, где G — объединение всех множеств из $\mathfrak{M}$, разреженно, и заключить отсюда, что X тогда — тощее множество.]

в) Показать, что множество $D(X)$ замкнутое, а множество $X \cap \mathbf{C}D(X)$ — тощее. [Установить с помощью б), что $X \cap \mathbf{C}D(X)$ тощее относительно открытого подпространства $\mathbf{C}D(X)$.]

г) Показать, что $D(X)$ совпадает с замыканием своей внутренности. [Показать, что $X \cap \mathbf{C}D'(X)$, где $D'(X)$ — замыкание внутренности множества $D(X)$,— тощее множество, заметив, что оно является объединением множеств $X \cap \mathbf{C}D(X)$ и $X \cap D(X) \cap \mathbf{C}D'(X)$].

4) Пусть E и F — топологические пространства, а A (соотв. B) — множество в E (соотв. в F).

а) Для того чтобы $A \times B$ было разреженным (соотв. совершенным) в $E \times F$, необходимо и достаточно, чтобы одно из множеств A, B было разреженным (соотв., чтобы A и B были замкнуты и одно из них совершенно).

б) Для того чтобы $A \times B$ было редким множеством в $E \times F$ (упр. 2), необходимо и достаточно, чтобы A и B оба были редкими.

*5) а) Пусть E и F — топологические пространства и A — разреженное подмножество произведения $E \times F$. Показать, что если топология пространства F обладает счетным базисом, то множество тех точек $x \in E$, для которых срез $A \cap (\{x\} \times F)$ множества A по x разрежен относительно $\{x\} \times F$, есть тощее множество в E. [Для каждого непустого открытого множества U в F показать, что множество тех $x \in E$, для которых $\{x\} \times U$ содержится в замыкании среза A по x, разреженно в E.].

б) Показать на примере, что результат пункта а) может оказаться неверным, если топология пространства F не имеет счетного базиса. [Принять за E отделимое пространство без изолированных точек, за F — дискретное пространство с тем же носителем, что и E, а за A — диагональ произведения $E \times F$.]

в) Если $B \subset E$, $C \subset F$ и одно из множеств B, C тощее (соотв. в E или F), то $B \times C$ есть тощее множество в $E \times F$. Обратно, если $B \times C$ — тощее множество в $E \times F$ и топология пространства E или F обладает счетным базисом, то одно из множеств B, C тощее.

г) Вывести из в), что если топология одного из пространств E, F обладает счетным базисом, то (в обозначениях упражнения 3) $D(B \times C) = D(B) \times D(C)$.

6) Множество X в топологическом пространстве E называется *приближаемым*, если существует открытое множество U такое, что каждое из множеств $U \cap \mathbf{C}X$, $X \cap \mathbf{C}U$ тощее.

а) Показать, что дополнение приближаемого множества приближаемо.

б) Показать, что объединение всякого счетного семейства приближаемых множеств приближаемо.

в) Показать, что следующие свойства равносильны:

α) X приближаемо;

β) в E существует тощее множество M такое, что в подпространстве $E - M$ множество $X \cap \mathbf{C}M$ открыто-замкнуто;

γ) в E существует множество $G \subset X$, являющееся пересечением счетного семейства открытых множеств, такое, что $X - G$ — тощее множество в E;

δ) в E существует множество $F \supset X$, являющееся объединением счетного семейства замкнутых множеств, такое, что $F - X$ — тощее множество в E;

ζ) $D(X) \cap D(E - X)$ (обозначения упражнения 3) — разреженное множество в E;

θ) $D(X) \cap \mathbf{C}X$ — тощее множество в E.

[Для доказательства равносильности свойств α), ζ) и θ) использовать упражнения 3а) и 3б) и показать, что α) влечет ζ), ζ) влечет θ) и θ) влечет α).]

г) Пусть E и F — топологические пространства, топология одного из которых обладает счетным базисом. Для того чтобы множество в $E \times F$ вида $A \times B$ было приближаемым, необходимо и достаточно, чтобы одно из множеств A, B было тощим или чтобы оба были приближаемыми. [Использовать свойство ζ) из пункта в).]

7) Топологическое пространство E называется *неистощимым*, если оно не тощее относительно самого себя *).

а) Для того чтобы E было неистощимо, необходимо и достаточно, чтобы всякое счетное семейство всюду плотных открытых множеств в E имело непустое пересечение.

б) В неистощимом пространстве дополнение ко всякому тощему множеству является неистощимым подпространством.

8) Пусть E — топологическое пространство, в котором существует непустое открытое множество A, являющееся неистощимым подпространством. Показать, что E — неистощимое пространство и что A не тощее относительно E.

9) Пусть E — подпространство в $\mathbf{R}^2$, являющееся объединением подпространства $\mathbf{Q}^2$ и прямой $y = 0$; показать, что E тощее относительно самого себя. Вывести отсюда, что топологическое пространство может обладать неистощимым подпространством, не будучи само неистощимым.

10) Показать, что всякое вейерштрассово (§ 1, упражнение 22) вполне регулярное пространство — бэровское. [Рассуждать, как при доказательстве теоремы 1].

11) Пусть E — топологическое пространство и A — его непустое подмножество. Точка $a \in E$ называется *точкой конденсации* множества A, если в каждой ее окрестности содержится *несчетное* множество точек из A.

*) В русской математической литературе такие пространства называют пространствами II категории в себе.— *Ред.*

а) Показать, что если E — бэровское пространство без изолированных точек, то всякая его точка есть точка конденсации множества E.

б) Пусть E — пространство, обладающее счетным базисом. Показать, что, каково бы ни было множество $A \subset E$, множество B всех его точек конденсации совершенно, а множество $A \cap CB$ счетно.

*12) Топологическое пространство E называется *совершенно неистощимым*, если всякое его непустое *замкнутое* подпространство неистощимо. Локально компактное пространство совершенно неистощимо; полное метрическое пространство совершенно неистощимо.

а) Показать, что совершенно неистощимое регулярное пространство — бэровское.

б) Счетное замкнутое множество в достижимом *) (гл. I, 3-е изд., § 8, упражнение 1) совершенно неистощимом пространстве — редкое (упражнение 2) и потому имеет по крайней мере одну изолированную точку.

в) В совершенно неистощимом пространстве E всякое подпространство A, являющееся пересечением счетно-бесконечного множества открытых множеств, совершенно неистощимо. [Показать, что если $F \subset A$ замкнуто в A, а $\overline{F}$ — замыкание F в E, то $\overline{F} \cap CF$ — тощее относительно $\overline{F}$.]

г) Если всякая точка топологического пространства E обладает окрестностью, являющейся совершенно неистощимым подпространством, то E совершенно неистощимо.

*13) Пусть E — связное и локально связное совершенно неистощимое топологическое пространство. Показать, что E не может быть объединением бесконечной последовательности (F_n) попарно непересекающихся непустых замкнутых множеств. [Пусть H — объединение границ H_n множеств F_n в E; показать, что H замкнуто в E, а каждое из множеств H_n разреженно относительно H; чтобы установить последнее, рассмотреть фундаментальную систему связных окрестностей точки из H_n и рассуждать от противного, используя предложение 3 § 11 главы I.]

14) Пусть E — подпространство в $\mathbf{R}^2$, состоящее из точек $(r, 0)$, где r пробегает множество $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел, и точек $(k/n, 1/n)$, где n пробегает множество всех целых чисел $\geqslant 1$, а k — множество всех целых рациональных чисел. Показать, что E — бэровское пространство, но не является совершенно неистощимым.

*15) Пусть E — множество на плоскости $\mathbf{R}^2$, состоящее из прямой $D = \{0\} \times \mathbf{R}$ и точек $(1/n, k/n^2)$, где n пробегает множество всех целых чисел >0, а k — множество $\mathbf{Z}$ всех целых рациональных чисел.

а) Для каждой точки $(0, y)$ из D и каждого целого $n > 0$ обозначим через $T_n(y)$ множество тех точек (u, v) на E, для которых $u \leqslant 1/n$

*) То есть в котором каждое одноточечное множество замкнуто.—*Ред.*

и $|v - y| \leqslant u$. Показать, что, приняв за фундаментальную систему окрестностей каждой точки $(0, y)$ множество всех $T_n(y)$, а за фундаментальную систему окрестностей каждой другой точки из E множество, образованное этой точкой, мы получим топологию $\mathscr{T}$ в E, мажорирующую топологию, индуцируемую из $\mathbf{R}^2$, и превращающую E в локально компактное пространство.

б) Показать, что E есть объединение счетного семейства метризуемых замкнутых подпространств и всякая точка в E обладает метризуемой компактной окрестностью, но E *не является нормальным*. [Пусть A — множество тех точек $(0, y)$, у которых y рационально, и $B = D - A$; показать, что в E всякая окрестность U множества A пересекается со всякой окрестностью V множества B; для этого рассмотреть для каждого n множество B_n тех $y \in B$, для которых $T_n(y) \subset V$, и заметить, что в $\mathbf{R}$ множество B — не тощее.]

*16) Обозначим через $\mathbf{R}_-$ топологическое пространство, получаемое наделением совершенно упорядоченного множества $\mathbf{R}$ всех вещественных чисел топологией $\mathscr{T}_-(\mathbf{R})$ (глава I, 2-е изд., § 1, упражнение 3; 3-е изд., § 2, упражнение 5).

а) Показать, что всякое открытое множество в $\mathbf{R}_-$ является объединением счетного семейства попарно непересекающихся открытых слева или открытых интервалов. Вывести отсюда, что пространство $\mathbf{R}_-$ совершенно нормально (§ 4, упражнение 8) и совершенно неистощимо (упражнение 12).

б) Показать, что пространство $\mathbf{R}_- \times \mathbf{R}_-$ не является нормальным и что, следовательно, $\mathbf{R}_-$ не метризуемо, хотя в $\mathbf{R}_-$ и существует всюду плотное счетное множество. [Рассматривая в $\mathbf{R}_- \times \mathbf{R}_-$ множество точек (x, y), для которых $x + y = 1$, показать, что в $\mathbf{R}_- \times \mathbf{R}_-$ существует замкнутое подпространство, гомеоморфное пространству E, определенному в упражнении 15.]

в) Показать, что $\mathbf{R}_-$ есть линделефово пространство (§ 4, упражнение 23) и, следовательно, паракомпактно (там же). [Пусть U_x для каждого $x \in \mathbf{R}_-$ — полуоткрытый интервал $]y(x), x]$ с правым концом x. Показать, что множество тех $z \in \mathbf{R}_-$, которые не принадлежат никакому открытому интервалу $]y(x), x[$, счетно; можно воспользоваться упражнением 1 § 2 гл. IV.]

г) Показать, что всякое компактное множество в $\mathbf{R}_-$ счетно. [Если A — компактное множество в $\mathbf{R}_-$, то топологии, индуцируемые в A топологиями $\mathscr{T}_-(\mathbf{R})$ и $\mathscr{T}_0(\mathbf{R})$, совпадают; вывести отсюда, что всякая точка из A является началом интервала, смежного с A.]

17) а) Показать, что всякое произведение $E = \prod_{\iota \in I} F_\iota$ полных метрических пространств есть бэровское пространство. [Рассуждать, как при доказательстве теоремы 1, принимая за G_n элементарное множество (гл. I, 2-е изд., § 8, n° 1; 3-е изд., § 4, n° 1), проекции которого, отличные от пространств F_ι, имеют диаметр $\leqslant 1/n$; заметить

далее, что существует счетное множество $J \subset I$ такое, что каждое G_n имеет вид $H_n \times \prod_{\iota \notin J} F_\iota$, где $H_n \subset \prod_{\iota \in J} F_\iota$.]

б) Показать на примере, что если I несчетно, то E не обязательно совершенно неистощимо (упражнение 12). [Использовать упражнения 1 и 23б) § 2.]

*18) а) Показать, что в полном метрическом пространстве всякое совершенное множество содержит подмножество, гомеоморфное канторову множеству (гл. IV, § 2, n° 5). [Использовать упражнение 11 § 8, гл. IV.]

б) Вывести отсюда, что в полном метрическом пространстве со счетным базисом всякое совершенное множество имеет мощность континуума; всякое замкнутое множество не более чем счетно или имеет мощность континуума. [Использовать упражнение 11б); всякое открытое множество не более чем счетно или имеет мощность континуума.]

в) Показать, что в несчетном полном метрическом пространстве, обладающем счетным базисом, множество всех совершенных множеств имеет мощность континуума. [Доказать это сначала для компактного пространства $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$, затем использовать а) и упражнение 12б) § 2.]

г) Пусть E — несчетное полное метрическое пространство со счетным базисом. Показать, что существует множество $Z \subset E$ такое, что Z и $E - Z$ имеют мощность континуума, но ни одно из них не содержит непустого совершенного множества. [Использовать б) и в) и метод, описанный в Теор. множ., гл. III, § 6, упражнение 24а).] Показать, что если, кроме того, в E нет изолированных точек, то ни Z ни $E - Z$ не тощее. [Используя в) и упражнение 24 § 2, показать, что пересечение A счетного семейства всюду плотных открытых множеств в E содержит непустые совершенные множества.] Вывести отсюда, что в этом случае Z не является приближаемым множеством в E (упражнение 6). [Заметить, что предыдущее рассуждение показывает, что $U \cap Z$ для каждого непустого открытого множества U в E не тощее.]

19) Пусть A — всюду плотное подпространство топологического пространства E и f — непрерывное отображение A в полное метрическое пространство F; показать, что те точки из E, в которых f не имеет предела (относительно A), образуют в E тощее множество. [Рассмотреть для каждого $n > 0$ множество тех точек $x \in E$, в которых колебание $\omega(x; f)$ функции f меньше $1/n$.]

*20) Пусть f — гомеоморфизм подпространства A полного метрического пространства E на подпространство A' полного метрического пространства E'; показать, что f допускает продолжение $\overline{f}$ на пересечение B некоторого счетного семейства открытых множеств из E, причем $\overline{f}$ является гомеоморфизмом B на пересечение B' счетного

семейства открытых множеств из E'. [Применить к f и к обратному гомеоморфизму g упражнение 19.]

*21) а) Пусть (f_n) — последовательность непрерывных отображений топологического пространства E в совершенно нормальное пространство F (§ 4, упражнение 8) такая, что последовательность $(f_n(x))$ для каждого $x \in E$ имеет предел $f(x)$ в F. Показать, что $A = f^{-1}(S)$ для каждого замкнутого множества $S \subset F$ является пересечением счетного семейства открытых множеств. [В F существует убывающая последовательность (U_n) открытых множеств такая, что $S = \bigcap_n \overline{U}_n$; заметить, что для того, чтобы $f(x) \in S$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого целого $n > 0$ существовало целое $k \geqslant 0$ такое, что $f_{n+k}(x) \in U_n$.] Вывести отсюда, что $\overline{A} - A$ — тощее множество в E.

б) Вывести из а), что если, кроме того, F метризуемо и счетного типа, то точки $x \in E$, в которых f терпит разрыв, образуют тощее множество. [Показать, что если (V_n) — базис топологии пространства F, $S = F - V_n$ и $A_n = f^{-1}(S_n)$, то x необходимо принадлежит одному из множеств $\overline{A}_n - A_n$.]

22) а) Пусть E — бэровское пространство, F — метрическое пространство и (f_n) — последовательность непрерывных отображений E в F такая, что последовательность $(f_n(x))$ имеет предел $f(x)$ в F для каждого $x \in E$. Показать, что точки $x \in E$, в которых f терпит разрыв, образуют тощее множество. [Доказать, что для каждого целого $n > 0$ множество точек $x \in E$, в которых колебание $\omega(x, f)$ функции f не превышает $1/n$, содержит всюду плотное открытое множество; обозначить для этого через G_p множество тех $x \in E$, для которых расстояние между $f_p(x)$ и $f_q(x)$ не превышает $1/2n$ при *всех* p и q таких, что $q \geqslant p$; показать, что объединение внутренностей всех множеств G_p есть всюду плотное открытое множество.]

б) Пусть K — компактный интервал $[0, 1]$ в $\mathbf{R}$; привести пример последовательности его непрерывных отображений f_n в компактное пространство K^K, для которой $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ существует при всех $x \in K$, но функция f разрывна в каждой точке из K.

*23) Пусть E — топологическое пространство, F и G — метрические пространства с расстояниями соответственно d и d' и f — отображение $E \times F$ в G такое, что $y \mapsto f(x_0, y)$ непрерывно на F для каждого $x_0 \in E$ и $x \mapsto f(x, y_0)$ непрерывно на E для каждого $y_0 \in F$.

а) Пусть $g(x; b, \varepsilon)$ для каждого $\varepsilon > 0$, каждой точки $b \in F$ и каждой точки $x \in E$ — верхняя грань чисел $\alpha > 0$, для которых $d(b, y) < \alpha$ влечет $d'(f(x, b), f(x, y)) \leqslant \varepsilon$. Показать, что функция $x \mapsto g(x; b, \varepsilon)$ полунепрерывна сверху.

б) Пусть E — бэровское пространство; вывести из пункта а) и теоремы 2, что для каждого $b \in F$ существует множество $S_b \subset E$

с тощим дополнением такое, что функция f непрерывна в точке (a, b) для каждого $a \in S_b$.

24) Пусть E и F — топологические пространства. Отображение f пространства E в F называется *приближаемым*, если прообраз $f^{-1}(S)$ каждого замкнутого множества $S \subset F$ является приближаемым множеством (упражнение 6).

а) Пусть g — отображение E в F, для которого существует тощее множество M в E такое, что сужение g на $\mathbf{C}M$ непрерывно; показать, что g приближаемо. И обратно, если топология пространства F обладает счетным базисом.

б) Предположим, что F совершенно нормально (§ 4, упражнение 8). Пусть (f_n) — последовательность приближаемых отображений E в F, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ существует при каждом $x \in E$. Показать, что f приближаемо. [Рассуждать, как в упражнении 21а).]

25) Пусть R — открытое отношение эквивалентности в топологическом пространстве E. Показать, что если E неистощимое пространство (упражнение 7) (соотв., бэровское пространство, совершенно неистощимое пространство (упражнение 12)), то E/R — неистощимое (соотв. бэровское, совершенно неистощимое) пространство.

*26) Пусть E — метризуемое локально компактное пространство, d — расстояние, согласующееся с его топологией, и R — замкнутое отношение эквивалентности в E такое, что всякий класс эквивалентности по R компактен. Как известно, тогда E/R локально компактно (гл. I, 2-е изд., § 10, упражнение 19, и предложение 17; 3-е изд., § 10, теорема 1 и предложение 9) и метризуемо (§ 4, упражнение 24).

а) Для каждой пары элементов u, v из E/R положим

$$\rho(u, v) = \sup_{\varphi(x)=u} d(x, \varphi^{-1}(v)),$$

где φ — каноническое отображение E на E/R, и для каждого $u \in E/R$ пусть

$$\lambda(u) = \lim_{v\to u,\ v\neq u} \sup \rho(u, v).$$

Показать, что λ полунепрерывно сверху на E/R и что для каждого $\alpha > 0$ множество тех $u \in E/R$, для которых $\lambda(u) \geqslant \alpha$, разреженно. [Показать, что в противном случае существовало бы компактное множество K в E, содержащее бесконечную последовательность (x_n) точек, для которой $d(x_m, x_n) > \alpha/2$ при $m \neq n$.]

б) Вывести из а), что в E/R существует всюду плотное множество M, являющееся пересечением счетного семейства открытых множеств и такое, что для каждого $x \in \varphi^{-1}(M)$ образ относительно φ всякой окрестности точки x в E является окрестностью точки $\varphi(x)$ в E/R. [Использовать теорему 1.]

*27) а) Пусть G — топологическая группа и A — ее приближаемое подмножество (упражнение 6). Показать, что если A не тощее, то AA^{-1} — окрестность нейтрального элемента в G. [Заметить сначала, что в силу упражнения 3 G — бэровское пространство. Пусть A^* — объединение открытых множеств $U \subset G$, для которых $U \cap CA$ — тощее множество. Показать, что A^* не пусто и что если $x \in G$ таково, что $xA^* \cap A^* \neq \varnothing$, то $xA \cap A \neq \varnothing$. Заключить, что $AA^{-1} \supset A^*(A^*)^{-1}$.]

б) Вывести из а), что доступная подгруппа топологической группы G либо тощая, либо открыта (и замкнута). В частности, счетная топологическая группа, являющаяся отделимым бэровским пространством, дискретна.

в) Показать, что в топологической группе $\mathbf{R}$ существуют подгруппы H такие, что $\mathbf{R}/H$ счетно-бесконечно. [Использовать базис Хамеля.] Всякая такая подгруппа всюду плотная, не тощая и не приближаемая.]

г) Пусть G — метризуемая топологическая группа, правая и левая равномерные структуры которой совпадают. Показать, что если на G существует согласующееся с топологией расстояние, превращающее G в полное метрическое пространство, то G — полная метризуемая группа. [Использовать б), упражнение 2 § 3 и упражнение 24 § 2.]

*28) Пусть G и G' — топологические группы. Показать, что всякое непрерывное представление f группы G *на* G' является *гомеоморфизмом* в каждом из следующих двух случаев:

а) G локально компактна и счетна в бесконечности, а G' неистощима. [Показать, что в G существует относительно компактное открытое множество U, для которого внутренность множества $f(\overline{U})$ не пуста; вывести отсюда, что для каждой компактной окрестности V нейтрального элемента внутренность множества $f(V)$ не пуста, и применить затем упражнение 16 § 2, гл. III 2-го изд. (3-е изд., § 2, упражнение 18).]

б) G полна и ее топология обладает счетным базисом *), а G' неистощима. [Используя то, что G есть объединение последовательности множеств вида $x_n U$ для всякой окрестности U нейтрального элемента e, показать, что для каждого открытого множества $A \subset G$ существует открытое множество $A' \subset G'$, содержащее $f(A)$ и такое, что $f(A)$ плотно в A'. Рассмотреть затем фундаментальную систему (U_n) симметричных окрестностей элемента e в G таких, что $\overline{U}^2_{n+1} \subset U_n$, и показать, что $f(U_p)$ содержит открытое множество U'_{p+1}; для этого взять точку $a' \in U'_{p+1}$ и построить по индукции последовательность

*) Если G не обладает счетным базисом, то предложение неверно, как показывает пример, в котором G' есть группа $\mathbf{R}$, наделенная топологией числовой прямой, G — группа $\mathbf{R}$, наделенная дискретной топологией, и f — тождественное отображение G на G'.

(b_n) точек из G такую, что $b_n \in U_{p+n}$ и $f(b_1 b_2 \ldots b_n)$ стремится к a'; заметить, что если $x' \in U'_h$, то существует $y \in U_h$ такое, что $f(y) \in x' U'_{h+1}$.]

29) Пусть G — локально компактная группа, счетная в бесконечности, или полная метризуемая группа, топология которой обладает счетным базисом. Пусть H — замкнутый нормальный делитель и A — замкнутая подгруппа группы G. Для того чтобы факторгруппа $A/(A \cap H)$ была изоморфна AH/H, необходимо и достаточно, чтобы AH было замкнутой подгруппой группы G. [Чтобы убедиться в необходимости условия, заметить, что в силу упражнения 13 § 2 гл. III 2-го изд. (3-е изд., § 4, предложение 13) и предложения 4 § 3 гл. IX, группа $A/(A \cap H)$ полна; чтобы убедиться в достаточности условия, воспользоваться упражнением 28.]

*30) Пусть G — группа и d — расстояние на G такое, что при определяемой им в G топологии $\mathscr{T}$ отображения $y \mapsto x_0 y$ и $y \mapsto y x_0$ группы G в себя непрерывны для каждого $x_0 \in G$.

а) Показать, что если G полна в топологии $\mathscr{T}$, то отображение $(x, y) \mapsto xy$ непрерывно на $G \times G$. [Использовать упражнение 23.]

б) Пусть, кроме того, $\mathscr{T}$ обладает счетным базисом. Показать, что тогда отображение $x \mapsto x^{-1}$ непрерывно на G, т. е., иначе говоря, что топология $\mathscr{T}$ *согласуется* с заданной в G структурой группы. [Рассмотреть в группе $G \times G$, наделенной произведением топологии $\mathscr{T}$ на себя, множество F точек (x, x^{-1}), где x пробегает G; F замкнуто в $G \times G$ и закон композиции $(x, x^{-1})(y, y^{-1}) = (xy, y^{-1}x^{-1})$ определяет в F структуру группы; используя а), показать, что топология, индуцируемая в F из $G \times G$, согласуется с этой структурой группы. Рассуждая, как в упражнении 28б), доказать затем, что проекция F на G взаимно непрерывна.]

§ 6. Польские пространства; суслинские пространства; борелевские множества

1. Польские пространства

Определение 1. *Топологическое пространство E называется польским, если оно метризуемо, счетного типа* (§ 2, n° 8) *и на E существует расстояние, согласующееся с его топологией, при котором E полно.*

Предложение 1. а) *Всякое замкнутое подпространство польского пространства есть польское пространство.*

б) *Произведение счетного семейства польских пространств есть польское пространство.*

в) *Сумма счетного семейства польских пространств есть польское пространство.*

В самом деле, всякое подпространство метризуемого пространства счетного типа есть метризуемое пространство счетного типа и каждое замкнутое подпространство полного пространства полно (гл. II, 2-е изд., § 3, предложение 6; 3-е изд., § 3, предложение 8). Произведение всякого счетного семейства метризуемых пространств счетного типа есть метризуемое пространство счетного типа (§ 2, n° 8) и произведение всякого счетного семейства полных метрических пространств есть полное метрическое пространство относительно некоторого расстояния, согласующегося с его топологией (гл. II, 2-е изд., § 5, предложение 4 (3-е изд., § 3, предложение 10) и гл. IX, § 2, следствие 2 теоремы 1). Пусть, наконец, (E_n) — последовательность непустых польских пространств; рассмотрим пространство $F = \mathbf{N} \times \prod_n E_n$, где $\mathbf{N}$ наделено дискретной топологией; согласно предыдущему F — польское пространство. С другой стороны, сопоставим каждому n точку a_n из E_n, и пусть f_n — отображение E_n в F такое, что для каждого $x \in E_n$ $f_n(x) = (n, (y_p))$, где $y_p = a_p$ при $p \neq n$ и $y_n = x$. Ясно, что отображение f суммы E пространств E_n в F, совпадающее с f_n на E_n для каждого n, есть гомеоморфизм E на $f(E)$; кроме того, $f_n(E_n)$ замкнуто в F при любом n, а семейство $(f_n(E_n))$ локально конечно, поскольку $\mathbf{N}$ дискретно; отсюда вытекает, что $f(E) = \bigcup_n f_n(E_n)$ замкнуто в F (§ 4, лемма 2) и, следовательно, $f(E)$ в силу а) есть польское пространство.

Предложение 2. *Всякое открытое подпространство польского пространства есть польское пространство.*

Пусть E — польское пространство, d — расстояние, согласующееся с его топологией, и U — открытое множество в E, отличное от E. Пусть V — множество в $\mathbf{R} \times E$, состоящее из тех точек (t, x), для которых $td(x, E - U) = 1$; подпространство V пространства $\mathbf{R} \times E$ замкнуто (§ 2, предложение 3) и, следовательно, польское (предложение 1). Поскольку сужение на V проекции pr_2 произведения $\mathbf{R} \times E$ на E есть гомеоморфизм V на U (§ 2, предложение 3), U есть польское подпространство.

Следствие. *Всякое локально компактное метризуемое и счетное в бесконечности пространство является польским.*

В самом деле, пусть E' — компактное пространство, получаемое присоединением к E бесконечно удаленной точки; как известно, E' метризуемо и счетного типа (§ 2, следствие предложения 16), а с другой стороны, E' полно в своей единственной равномерной структуре (гл. II, § 4, теорема 1); таким образом, E' — польское пространство, и то же верно для E, как открытого подпространства пространства E'.

Предложение 3. *Пусть E — отделимое топологическое пространство; пересечение последовательности (A_n) его польских подпространств есть польское пространство.*

Пусть f — диагональное отображение E в $F^{\mathbf{N}}$ (Теор. множ., гл. II, § 5, n° 3; напомним, что $f(x) = (y_n)$, где $y_n = x$ для всех n); мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма 1. *Пусть (A_n) — последовательность подмножеств отделимого топологического пространства E; сужение диагонального отображения $f\colon E \to E^{\mathbf{N}}$ на подпространство $\bigcap_n A_n$ пространства E есть гомеоморфизм пространства $\bigcap_n A_n$ на замкнутое подпространство произведения $\prod_n A_n$.*

В самом деле, этот образ есть пересечение $\prod_n A_n$ с диагональю $\Delta = f(E)$, которая замкнута в $E^{\mathbf{N}}$, поскольку E отделимо (гл. I, 2-е изд., § 8, следствие 1 предложения 6; 3-е изд., § 8, предложение 2), а с другой стороны, f есть гомеоморфизм E на Δ.

В условиях предложения 3 $\prod_n A_n$ есть польское пространство (предложение 1), и потому $\bigcap_n A_n$, в силу леммы 1 и предложения 1,— его польское подпространство.

Следствие. *Пространство всех иррациональных чисел, наделенное топологией, индуцированной топологией числовой прямой* $\mathbf{R}$, *является польским.*

В самом деле, оно является пересечением счетного семейства открытых множеств в $\mathbf{R}$, а именно дополнений множеств, сводящихся к одной рациональной точке.

Теорема 1. *Для того чтобы подпространство F польского пространства E было польским, необходимо и достаточно, чтобы F было пересечением счетного семейства открытых множеств в E.*

Достаточность условия сразу следует из предложений 2 и 3. Докажем его необходимость. Пусть d — расстояние, согласующееся с топологией пространства F и превращающее его в полное метрическое пространство, и $\overline{F}$ — замыкание F в E. Пусть F_n для каждого целого n — множество точек $x \in \overline{F}$, обладающих открытой окрестностью U, пересечение $U \cap F$ которой с F имеет диаметр (относительно расстояния d) $\leqslant 1/n$. Ясно, что F_n открыто в $\overline{F}$ и содержит F. Пусть x — точка, принадлежащая пересечению всех F_n; x есть точка прикосновения множества F и след на F фильтра ее окрестностей в E есть фильтр Коши (относительно расстояния d); значит, этот фильтр сходится к некоторой точке из F и, следовательно, $x \in F$; другими словами, $F = \bigcap_n F_n$. Пусть H_n для каждого n есть открытое множество в E такое, что $H_n \cap \overline{F} = F_n$; с другой стороны, пусть (U_m) — последовательность открытых множеств в E такая, что $\overline{F} = \bigcap_m U_m$ (§ 2, предложение 7); тогда F есть пересечение счетного семейства $(H_n \cup U_m)$ открытых множеств.

Следствие 1. *Для того чтобы пространство E было польским, необходимо и достаточно, чтобы E было гомеоморфно пересечению счетного семейства открытых подмножеств куба $I^{\mathbf{N}}$* (где I — интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$).

Достаточность условия очевидна; оно необходимо, ибо всякое метризуемое пространство счетного типа гомеоморфно подпространству куба $I^{\mathbf{N}}$ (§ 2, предложение 12).

Следствие 2. *Пусть E и F — польские пространства и f — непрерывное отображение E в F. Прообраз $f^{-1}(G)$ всякого*

польского подпространства G пространства F есть польское подпространство в E.

В самом деле, $G = \bigcap_n G_n$, где G_n — открытые множества в F; отсюда $f^{-1}(G) = \bigcap_n f^{-1}(G_n)$, где $f^{-1}(G_n)$ — открытые множества в E.

2. *Суслинские пространства*

Определение 2. *Топологическое пространство E называется суслинским, если оно метризуемо и существуют польское пространство P и непрерывное отображение P на E. Множество A в топологическом пространстве E называется суслинским, если подпространство A суслинское.*

Ясно, что всякое польское пространство — суслинское и что образ суслинского пространства E относительно непрерывного отображения E в метризуемое пространство F есть суслинское пространство.

Предложение 4. *Всякое суслинское пространство E есть пространство счетного типа.*

В самом деле, пусть P — польское пространство и f — непрерывное отображение P на E; образ всюду плотного счетного множества из P относительно f есть всюду плотное счетное множество в E.

Предложение 5. *Всякое замкнутое* (соответственно *открытое*) *подпространство суслинского пространства E есть суслинское пространство.*

В самом деле, пусть f — непрерывное отображение польского пространства P на E; тогда прообраз относительно f замкнутого (соответственно открытого) множества из E есть замкнутое (соответственно открытое) множество в P, и потому польское подпространство (предложения 1 и 2).

Предложение 6. *Пусть E — суслинское пространство и f — его непрерывное отображение в отделимое пространство F. Прообраз относительно f всякого суслинского подпространства A пространства F есть суслинское подпространство пространства E.*

В самом деле, пусть P и Q — польские пространства, g — непрерывное отображение P на E и h — непрерывное отображение Q на A. Пусть R — множество тех точек $(x, y) \in P \times Q$, для которых $f(g(x)) = h(y)$; R замкнуто в $P \times Q$ и потому является польским подпространством (предложение 1). Пусть φ — сужение на R проекции pr_1; тогда подпространство $f^{-1}(A)$ пространства E есть образ R относительно непрерывного отображения $g \circ \varphi$ и, следовательно,— суслинское пространство.

Предложение 7. *Произведение и сумма счетного семейства суслинских пространств являются суслинскими пространствами.*

В самом деле, пусть для каждого целого n E_n — метризуемое пространство, P_n — польское пространство и f_n — непрерывное отображение P_n на E_n. Произведение (соотв. сумма) пространств P_n есть польское пространство (предложение 1), а образ этого пространства относительно произведения отображений f_n (соотв. отображения, совпадающего с f_n на каждом P_n) есть произведение (соотв. сумма) пространств E_n и, значит, будучи метризуемым, — суслинское пространство.

Предложение 8. *Объединение и пересечение всякой последовательности (A_n) суслинских подпространств метризуемого пространства E являются суслинскими подпространствами.*

В самом деле, эти подпространства метризуемы. Существование канонического отображения суммы пространств A_n на подпространство $\bigcup_n A_n$ пространства E показывает, что это последнее — суслинское (предложение 7); с другой стороны, $\bigcap_n A_n$ — суслинское в силу предложений 5 и 7 и леммы 1.

> В общем случае даже в польском пространстве дополнение к суслинскому подпространству может не быть суслинским (см. упражнение 6); см., однако, в n° 6 следствие теоремы 2.

Предложение 9. *Для каждого относительно компактного суслинского подпространства A метризуемого пространства E существуют компактное метризуемое пространство K, убывающая последовательность (B_n) его подмножеств, каждое из которых*

есть объединение счетного семейства компактных множеств, и непрерывное отображение f пространства K в E такие, что $A = f\left(\bigcap_n B_n\right)$.

Заменяя E на $\overline{A}$, можем считать, что E компактно и A всюду плотно в E. Поскольку A — суслинское, существуют польское пространство P и его непрерывное отображение g в E такие, что $g(P) = A$. По следствию 1 теоремы 1 можно предполагать, что P есть пересечение убывающей последовательности (U_n) открытых подмножеств куба $I^{\mathbf{N}}$. Возьмем в качестве K пространство $I^{\mathbf{N}} \times E$; оно компактно и метризуемо (§ 2, следствие 2 теоремы 1). Пусть $G \subset P \times E$ — график отображения g и $\overline{G}$ — его замыкание в K; обозначим через f каноническую проекцию пространства $K = I^{\mathbf{N}} \times E$ на E. Очевидно, $f(G) = A$. Так как g непрерывно, то G замкнуто в $P \times E$ (гл. I, 2-е изд., § 8, следствие 2 предложения 6; 3-е изд., § 8, следствие 2 предложения 8), так что $G = \overline{G} \cap (P \times E)$ (гл. I, § 3, предложение 1) и, следовательно, $G = \bigcap_n B_n$, где $B_n = \overline{G} \cap (U_n \times E)$. Так как каждое U_n есть объединение счетного семейства замкнутых подмножеств куба $I^{\mathbf{N}}$ (§ 2, предложение 7), то каждое B_n есть объединение счетного семейства компактных множеств, и предложение доказано.

3. Борелевские множества

Определение 3. *Множество $\mathfrak{T}$ подмножеств множества A называется телом на A, если выполняются следующие условия:*

а) *дополнение всякого множества из $\mathfrak{T}$ принадлежит $\mathfrak{T}$;*

б) *пересечение всякого счетного семейства множеств из $\mathfrak{T}$ принадлежит $\mathfrak{T}$.*

Если $\mathfrak{T}$ — тело, то *объединение* всякого *счетного* семейства множеств из $\mathfrak{T}$ принадлежит $\mathfrak{T}$ (ибо дополнение этого объединения есть пересечение множеств из $\mathfrak{T}$).

Множество $\mathfrak{P}(A)$ всех подмножеств множества A, очевидно, есть тело. Всякое пересечение тел на A есть тело на A. Следовательно, для каждого подмножества $\mathfrak{F}$ множества $\mathfrak{P}(A)$ существует *наименьшее тело*, содержащее $\mathfrak{F}$; его называют телом, *порожденным* множеством $\mathfrak{F}$.

Определение 4. *Борелевскими множествами в топологическом пространстве E называют элементы тела, порожденного множеством всех замкнутых подмножеств пространства E.*

Предложение 10. *Пусть f — непрерывное отображение топологического пространства E в топологическое пространство F. Прообраз относительно f всякого борелевского множества из F есть борелевское множество в E.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{T}$ — множество всех подмножеств Y пространства F, для которых $f^{-1}(Y)$ — борелевское множество в E. Ясно, что $\mathfrak{T}$ есть тело, содержащее все замкнутые множества из F; следовательно, $\mathfrak{T}$ содержит все борелевские множества из F.

Предложение 11. *Всякое борелевское подмножество суслинского пространства E является суслинским.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{T}$ — множество всех подмножеств X пространства E, являющихся суслинскими вместе со своим дополнением CX; предложение 8 показывает, что $\mathfrak{T}$ — тело. Всякое замкнутое множество A в E принадлежит $\mathfrak{T}$, ибо и A и CA — суслинские множества (предложение 5); следовательно, $\mathfrak{T}$ содержит все борелевские множества в E (см. следствие теоремы 2).

Следствие. *Пусть f — непрерывное отображение суслинского пространства E в метризуемое пространство F. Для каждого борелевского множества B из E множество $f(B)$ — суслинское.*

В самом деле, B — суслинское множество, а тогда, по замечанию, следующему за определением 2, и $f(B)$ — суслинское множество.

Замечания. 1) Даже если E и F — польские пространства, вообще говоря, неверно, что образ борелевского множества из E при непрерывном отображении E в F есть борелевское множество в F (см. упражнение 6 и n° 7, следствие теоремы 3).

2) Пусть E — топологическое пространство и F — его *борелевское* подмножество. Тогда борелевские подмножества пространства F — не что иное, как те борелевские множества из E, которые содержатся в F. В самом деле: 1° борелевские множества из E, содержащиеся в F, образуют в F тело, содержащее все его замкнутые, а потому и все борелевские подмножества; 2° множества $X \subset E$, для которых $X \cap F$ борелевское множество в F, образуют тело в E, содержащее все замкнутые, а потому и все борелевские множества из E.

4. *Раздробленные и лузинские пространства*

Определение 5. *Топологическое пространство называется раздробленным, если оно отделимо и каждая его точка обладает фундаментальной системой открыто-замкнутых окрестностей.*

Всякое раздробленное пространство *вполне несвязно*, ибо связная компонента точки x содержится во всех открыто-замкнутых множествах, содержащих x (гл. I, § 11, n° 5), а пересечение всех этих множеств сводится к точке x, если E — раздробленное пространство.

Обратно, *локально компактное* вполне несвязное пространство является раздробленным (гл. II, 2-е изд., § 4, следствие предложения 3; 3-е изд., § 4, следствие предложения 6); однако существуют метризуемые вполне несвязные пространства, не являющиеся раздробленными (упражнение 35)).

Всякое подпространство раздробленного пространства есть раздробленное пространство; всякое произведение (соответственно сумма) раздробленных пространств есть раздробленное пространство.

Определение 6. *Топологическое пространство E называется лузинским, если оно метризуемо и является биективным непрерывным образом некоторого раздробленного польского пространства P.*

Ясно, что всякое лузинское пространство является суслинским.

Предложение 12. *Для того чтобы метризуемое пространство было лузинским, необходимо и достаточно, чтобы оно было* биективным *непрерывным образом некоторого польского пространства.*

Необходимость условия очевидна, и остается доказать его достаточность. Если f — биективное непрерывное отображение лузинского пространства E на метризуемое пространство F, то, как следует из определения 6, F — лузинское пространство. Таким образом, все сводится к доказательству того, что *всякое польское пространство является лузинским.*

Заметим прежде всего, что всякое замкнутое (соотв. открытое) подпространство A лузинского пространства E есть лузинское

пространство (см. теорему 3); в самом деле, если f — биективное непрерывное отображение раздробленного польского пространства P на E, то $f^{-1}(A)$ замкнуто (соотв. открыто) в P и, значит (предложения 1 и 2), является раздробленным польским подпространством, чем наше утверждение и доказано.

Произведение всякого *счетного* семейства лузинских пространств есть лузинское пространство; это вытекает из предложения 1 и того, что всякое произведение раздробленных пространств есть раздробленное пространство. *Пересечение* всякого *счетного* семейства лузинских подпространств отделимого топологического пространства есть лузинское подпространство; это сразу следует из предыдущих замечаний и леммы 1. Кроме того:

Лемма 2. *Если метризуемое пространство E допускает счетное разбиение (A_n), состоящее из лузинских подпространств, то E — лузинское пространство.*

В самом деле, пусть для каждого целого n P_n есть раздробленное польское пространство, а f_n — непрерывная биекция P_n на A_n; сумма P пространств P_n есть польское (предложение 1) раздробленное пространство, а его отображение f в E, совпадающее с f_n на каждом P_n, является непрерывной биекцией P на E, чем лемма и доказана.

Установив это, покажем прежде всего, что интервал $I = [0, 1]$, из $\mathbf{R}$ есть лузинское пространство. Пусть J — его подпространство, образованное всеми иррациональными точками; J — польское пространство (следствие предложения 3); с другой стороны, J — раздробленное пространство, ибо для каждой точки x из J следы на J интервалов из $\mathbf{R}$ вида $]r, s[$, где r и s рациональны и $r < x < s$, образуют фундаментальную систему открыто-замкнутых окрестностей точки x в J (поскольку следы на J интервалов $]r, s[$ и $[r, s]$ совпадают). Но J и множества, сводящиеся к одной рациональной точке, образуют счетное разбиение интервала I, и потому наше утверждение вытекает из леммы 2.

Пусть, наконец, P — произвольное польское пространство; по следствию 1 теоремы 1 оно гомеоморфно подпространству ку-

ба $I^{\mathbf{N}}$, являющемуся пересечением счетного семейства его открытых подмножеств; справедливость предложения вытекает теперь из того, что I — лузинское пространство, и замечаний, сделанных в начале доказательства.

5. *Решето*

Определение 7. *Решетом называют последовательность* $C = (C_n, p_n)_{n\geqslant 0}$, *где* C_n *при любом* n *есть не более чем счетное множество, а* p_n *— сюръективное отображение* C_{n+1} *на* C_n

Для каждой пары m, n целых чисел таких, что $0 \leqslant m \leqslant n$ обозначим через p_{mn} тождественное отображение C_m на себя, если $m = n$, и сюръективное отображение $p_m \circ p_{m+1} \circ \ldots \circ p_{n-1}$ множества C_n на C_m, если $m < n$. Ясно, что если $m \leqslant n \leqslant q$, то $p_{mq} = p_{mn} \circ p_{nq}$, и потому можно рассматривать множество $L(C)$, являющееся *проективным пределом* семейства (C_n) относительно семейства отображений (p_{mn}). (Теор. множ., гл. III, § 1, n° 12); топологизируем это множество следующим образом. Каждое C_n наделим дискретной топологией, а $\prod_n C_n$ — топологией произведения; $L(C)$ есть подмножество множества $\prod_n C_n$, образованное теми последовательностями (c_n), в которых $c_n = p_n(c_{n+1})$ для каждого n, и мы наделим его топологией, индуцированной из $\prod_n C_n$. Ясно, что $L(C)$ *замкнуто* в пространстве $\prod_n C_n$; отсюда сразу вытекает, что $L(C)$ *— раздробленное польское пространство* (n° 4); мы будем называть $L(C)$ топологическим пространством, *ассоциированным* с решетом C.

Просеиванием метрического пространства E называют задание решета $C = (C_n, p_n)$ и для каждого целого $n \geqslant 0$ отображения φ_n множества C_n в множество всех *непустых замкнутых* множеств *диаметра* $\leqslant 2^{-n}$ из E, удовлетворяющее следующим условиям:

а) E является объединением всех $\varphi_0(c)$, когда c пробегает C_0;

б) $\varphi_n(c)$ при каждом n и каждом $c \in C_n$ есть объединение всех $\varphi_{n+1}(c')$, где c' пробегает $p_n^{-1}(c)$.

Просеивание называется *строгим*, если, кроме того, для каждого n множества $\varphi_n(c)$, где c пробегает C_n, *попарно не пересекаются*.

Лемма 3. *Всякое метрическое пространство E счетного типа допускает просеивание. Если, кроме того, E раздробленно, то оно допускает строгое просеивание.*

Заметим сначала, что если F — метрическое пространство счетного типа и ε — число >0, то существует счетное покрытие пространства F множествами диаметра $\leqslant\varepsilon$ (§ 2, предложение 13). Если, кроме того, F раздробленно, то существует покрытие (V_n) указанного типа, состоящее из открыто-замкнутых множеств; обозначив через W_n пересечение V_n с $\bigcap_{k<n}(F - V_k)$, видим, что W_n замкнуты, имеют диаметр $\leqslant\varepsilon$, попарно не пересекаются и покрывают E. Во всех случаях замыкания непустых множеств рассматриваемого покрытия образуют счетное покрытие пространства F, элементами которого являются непустые замкнутые множества диаметра $\leqslant\varepsilon$.

Пусть теперь E — метрическое пространство счетного типа. Пусть C_0 — множество индексов счетного покрытия пространства E, состоящего из непустых замкнутых множеств диаметра $\leqslant 1$, попарно непересекающихся, если E раздробленно, и φ_0 — отображение, сопоставляющее каждому индексу $c \in C_0$ соответствующее множество покрытия. Предположим, что C_i, φ_i и сюръективные отображения $p_i\colon C_i \to C_{i-1}$ уже определены для всех $i < n$ так, что для этих индексов выполнено условие б). Если $c \in C_n$, то пространство $\varphi_n(c)$ обладает счетным покрытием непустыми замкнутыми множествами диаметра $\leqslant 2^{-n-1}$, попарно непересекающимися, если E (а значит, и $\varphi_n(c)$) раздробленное; пусть $I(c)$ — множество индексов этого покрытия; примем за C_{n+1} сумму множеств $I(c)$, где c пробегает C_n; для каждого $c' \in C_{n+1}$ обозначим через $p_n(c')$ элемент $c \in C_n$, для которого $c' \in I(c)$, а через $\varphi_{n+1}(c')$ — множество с индексом c' рассматриваемого покрытия пространства $\varphi_n(c)$. Ясно, что таким путем по индукции определится просеивание пространства E, строгое, если E раздробленное, и лемма доказана.

Предположим теперь, что E — *полное* метрическое пространство счетного типа, и рассмотрим просеивание E посредством решета C и отображений φ_n. Если $\gamma = (c_n)$ — точка пространства $L(c)$, ассоциированного с C, то $(\varphi_n(c_n))$ — убывающая последовательность замкнутых множеств в E, диаметр которых стремится к 0; пересечение этой последовательности множеств сводится, следовательно, к одной точке, которую мы обозначим $f(\gamma)$. Тем самым мы определили отображение f пространства $L(C)$ в E; ясно, что если точки γ и γ' из $L(C)$ имеют одни и те же координаты с индексом i для всех $i \leqslant n$, то расстояние между $f(\gamma)$ и $f(\gamma')$ не превосходит 2^{-n}; значит, в силу определения топологии в $L(C)$, f *непрерывно*. Из определения просеивания вытекает, что для каждого $x \in E$ индукцией по n можно определить последовательность $\gamma = (c_n)$ так, чтобы $x \in \varphi_n(c_n)$ для всех $n \geqslant 0$ и $c_n = p_n(c_{n+1})$; следовательно, $x = f(\gamma)$, т. е. f *сюръективно*. Кроме того, если просеивание строгое, то последовательность $\gamma = (c_n)$, для которой $x = f(\gamma)$, единственна, так что f *биективно*. Мы будем называть f *отображением, порожденным* рассматриваемым *просеиванием*.

Предложение 13. *Для каждого лузинского* (соотв. *суслинского*) *пространства E существуют решето C и непрерывное биективное* (соотв. *сюръективное*) *отображение $L(C)$ на E.*

В силу определения 6 лузинского (соотв. определения 2 суслинского) пространства вопрос сводится к случаю, когда E является раздробленным польским (соотв. польским) пространством, и предыдущее рассуждение приводит тогда к предложению 13.

6. Отделение суслинских множеств

Теорема 2. *Для каждой последовательности (E_n) попарно непересекающихся суслинских подпространств метризуемого пространства E существует последовательность (B_n) его попарно непересекающихся борелевских множеств, такая, что $E_n \subset B_n$ для каждого n.*

Установим предварительно две леммы.

Лемма 4. *Пусть (A_n) и (A'_m) — последовательности подмножеств топологического пространства E. Предположим, что для каждой пары (A_n, A'_m) существует борелевское множество B_{nm}*

в E такое, что $B_{nm} \supset A_n$ и $B_{nm} \cap A'_m = \varnothing$. Тогда в E существует борелевское множество B, содержащее $\bigcup_n A_n$ и не пересекающееся с $\bigcup_m A'_m$.

В самом деле, требуемым свойством обладает множество $B = \bigcup_n (\bigcap_m B_{nm})$.

Лемма 5. *Пусть E — отделимое пространство и A, A' — его суслинские подпространства, не имеющие общих точек. Тогда в E существует борелевское множество B такое, что $B \supset A$ и $B \cap A' = \varnothing$.*

В самом деле, в силу предложения 13 существуют два решета C, C', непрерывное отображение f пространства $L(C)$ на A и непрерывное отображение f' пространства $L(C')$ на A', определенные способом, описанным в n° 5. Пусть $q_n(c)$ для каждого $n \geqslant 0$ и каждого $c \in C_n$ означает подпространство пространства $L(C)$, образованное всеми последовательностями $(c_k)_{k \geqslant 0}$, у которых $c_n = c$. Это — замкнутое подпространство в $L(C)$. Для каждого $\gamma = (c_n) \in L(C)$ последовательность замкнутых множеств $q_n(c_n)$ убывает и образует базис фильтра, имеющего своим пределом γ. Кроме того, для каждого $c \in C_n$ множества $q_{n+1}(d)$, где d пробегает множество $p_n^{-1}(c)$ в C_{n+1}, образуют разбиение пространства $q_n(c)$. Аналогичные обозначения введем для решета C'.

Будем теперь рассуждать от противного, предполагая, что всякое борелевское множество, содержащее A, пересекается с A'. Прежде всего, из леммы 4 и определения просеивания вытекает существование таких $c_0 \in C_0$ и $c'_0 \in C'_0$, что всякое борелевское множество, содержащее $f(q_0(c_0))$, пересекается с $f'(q'_0(c'_0))$. Применив тогда индукцию по n, определим элементы $\gamma = (c_n) \in L(C)$ и $\gamma' = (c'_n) \in L(C')$ следующим образом: пусть c_i и c'_i уже определены для всех $i < n$ так, что для каждого $i < n$ всякое борелевское множество, содержащее $f(q_i(c_i))$, пересекается с $f'(q'_i(c'_i))$; применяя лемму 4 и определение просеивания к множествам $f(q_{n-1}(c_{n-1}))$ и $f'(q'_{n-1}(c'_{n-1}))$, видим, что существуют $c_n \in C_n$ и $c'_n \in C'_n$ такие, что $p_{n-1}(c_n) = c_{n-1}$, $p'_{n-1}(c'_n) = c'_{n-1}$ и каждое борелевское множество, содержащее $f(q_n(c_n))$, пересекается

с $f'(q'_n(c'_n))$. Но последовательность $f(q_n(c_n))$ сходится к точке $a = f(\gamma) \in A$, а последовательность $f'(q'_n(c'_n))$ — к точке $a' = f'(\gamma') \in A'$. Поскольку $A \cap A' = \varnothing$ и E отделимо, существует замкнутая окрестность V точки a, не содержащая a'; для достаточно большого n она содержит $f(q_n(c_n))$ и не пересекается с $f'(q'_n(c'_n))$, в противоречие с тем, что V — борелевское множество.

Итак, леммы доказаны. Обозначим теперь через F_n для каждого целого n объединение всех множеств E_i с индексом $i \neq n$; F_n — суслинское пространство (предложение 8). В силу леммы 5 для каждого индекса n существует борелевское множество B'_n, содержащее E_n и не пересекающееся с F_n. Пусть B_n — пересечение B'_n и $\bigcap_{i<n}(E - B'_i)$. Множества B_n борелевские, попарно непересекающиеся и $B_n \supset E_n$ для каждого n; теорема 2 тем самым доказана.

Следствие. *Если конечное или счетное разбиение метризуемого пространства образовано суслинскими множествами, то эти множества являются борелевскими. В частности, в метризуемом пространстве всякое суслинское множество, имеющее суслинское дополнение, есть борелевское множество.*

7. *Лузинские пространства и борелевские множества*

Теорема 3. *Пусть E — лузинское пространство. Для того чтобы его подпространство было лузинским, необходимо и достаточно, чтобы оно было борелевским в E.*

Это вытекает из следующих двух лемм:

Лемма 6. *В лузинском пространстве E всякое борелевское множество есть лузинское подпространство.*

Пусть $\mathfrak{L}$ — множество всех подмножеств A пространства E, которые вместе со своим дополнением CA являются лузинскими подпространствами.

Поскольку все замкнутые и все открытые множества в E являются лузинскими подпространствами (п° 4), $\mathfrak{L}$ содержит все замкнутые множества из E. Следовательно, лемма будет доказана, если мы установим, что $\mathfrak{L}$ — тело. Для этого достаточно показать, что для каждой последовательности (A_n) множеств из $\mathfrak{L}$ подпро-

странства $\bigcap_n A_n$ и $\bigcup_n A_n$ пространства E — лузинские. Но мы видели в n° 4, что пересечение всякого счетного семейства лузинских подпространств есть лузинское подпространство. С другой стороны, из предположения и предыдущего замечания вытекает, что пересечение B_n множеств A_n и $\bigcap_{i<n} CA_i$ — лузинское подпространство; а так как $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$, то подпространство $\bigcup_n A_n$ — лузинское в силу леммы 2.

Лемма 7. *Всякое лузинское подпространство A метризуемого пространства E есть борелевское множество в E.*

По предложению 13 существуют решето C и *непрерывное биективное* отображение f пространства $L(C)$ на A. Пусть в обозначениях леммы 5 $g_n(c)$ для каждого целого n и каждого $c \in C_n$ означает подпространство $f(q_n(c))$ пространства E; это есть лузинское и, следовательно, суслинское подпространство пространства E. Поскольку f биективно, множества $g_n(c)$, где c пробегает C_n, попарно не пересекаются; поэтому в силу теоремы 2 существует семейство $c \mapsto g'_n(c)$ $(c \in C_n)$ попарно непересекающихся борелевских множеств в E таких, что $g'_n(c) \supset g_n(c)$ для каждого $c \in C_n$. Заменяя $g'_n(c)$ его пересечением с замыканием $\overline{g_n(c)}$ множества $g_n(c)$ в E, можем предполагать, что $g'_n(c) \subset \overline{g_n(c)}$. Обозначим через c_{n-1}, c_{n-2}, . . ., c_0 образы элемента c соответственно в C_{n-1}, C_{n-2}, . . ., C_0 при сюръективных отображениях

$$p_{n-1,n} = p_{n-1},\ p_{n-2,n} = p_{n-2} \circ p_{n-1},\ \ldots,\ p_{0,n} = p_0 \circ p_1 \circ \ldots \circ p_{n-1};$$

пусть $h_n(c)$ — пересечение множеств

$$g'_n(c),\ g'_{n-1}(c_{n-1}),\ \ldots,\ g'_0(c_0).$$

Так как $q_i(c_i) \supset q_n(c)$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, то $h_n(c)$ содержит $g_n(c)$; кроме того, ясно, что $h_n(c)$ — борелевское множество, содержащееся в $\overline{g_n(c)}$, причем когда c пробегает C_n, множества $h_n(c)$ попарно не пересекаются; наконец, по построению $h_{n+1}(c') \subset h_n(p_n(c'))$ для каждого $c' \in C_{n+1}$. Пусть теперь B_n — объединение всех $h_n(c)$ $(c \in C_n)$; B_n — борелевское множество и $B_{n+1} \subset B_n$; кроме того, B_n содержит объединение всех $g_n(c)$ $(c \in C_n)$,

т. е. множество A. Пусть B — пересечение убывающей последовательности множеств B_n; это — борелевское множество, содержащее A. Покажем, что $B = A$, чем и завершится доказательство.

Пусть x — точка из B; для каждого целого n существует, и притом единственное, $c \in C_n$ такое, что $x \in h_n(c)$; обозначим его через $c_n(x)$; тогда последовательность $(c_n(x))_{n \geqslant 0}$ принадлежит $L(C)$. Убывающая последовательность $(g_n(c_n(x)))$ по определению сходится к некоторой точке $a \in A$; последовательность замыканий этих множеств также сходится к a в E, и то же тем более имеет место для последовательности $(h_n(c_n(x)))$. Но x принадлежит всем $h_n(c_n(x))$, следовательно, $x = a \in A$, и теорема доказана.

Следствие. *Образ лузинского (в частности, польского) пространства E относительно его инъективного отображения в метризуемое пространство F есть борелевское множество в F.*

8. Борелевские сечения

Теорема 4. *Пусть E — польское пространство и R — отношение эквивалентности в E такое, что классы по R замкнуты в E, а насыщение по R всякого замкнутого множества есть борелевское множество. Тогда в E существует борелевское множество, пересекающее каждый класс эквивалентности по R в одной и только одной точке.*

Рассмотрим на E расстояние, согласующееся с его топологией и превращающее E в полное метрическое пространство. По лемме 3 существует просеивание пространства E, определенное рететом $C = (C_n, p_n)$ и последовательностью отображений (φ_n). Пусть $g_n(c)$ для каждого $c \in C_n$ означает насыщение замкнутого множества $\varphi_n(c)$ по R; в силу предположения $g_n(c)$ — борелевское множество в E.

Поскольку каждое множество C_n не более чем счетно, мы можем наделить его отношением совершенного порядка, при котором для каждого заданного элемента множество всех элементов, меньших, чем он, конечно. Индукцией по n определим для каждого $c \in C_n$ множество $h_n(c)$ следующим образом. Прежде всего, для $c \in C_0$ пусть $h_0(c)$ есть пересечение $\varphi_0(c)$ и всех множеств $E - g_0(c')$, где $c' \in C_0$ и $c' < c$. Если $c \in C_{n+1}$, то $h_{n+1}(c)$

пусть будет пересечением $\varphi_{n+1}(c)$, $h_n(p_n(c))$ и всех множеств $E - g_{n+1}(c')$, где $c' \in C_{n+1}$, $p_n(c') = p_n(c)$ и $c' < c$. Ясно, что все $h_n(c)$ — борелевские множества.

Докажем следующее утверждение: для каждого целого $n \geqslant 0$ и каждого класса эквивалентности H по R существует, и притом единственный, элемент $c \in C_n$ такой, что $h_n(c)$ пересекается с H, и тогда

$$h_n(c) \cap H = \varphi_n(c) \cap H,$$

что является, таким образом, *замкнутым* множеством. Для $n = 0$ рассмотрим наименьший элемент $c \in C_0$ такой, что $\varphi_0(c)$ пересекается с H; тогда $\varphi_0(c) \cap H$ не пересекается ни с одним из $g_0(c')$, соответствующих тем $c' \in C_0$, которые $< c$, и потому содержится в $h_0(c) \cap H$, а следовательно, совпадает с ним; кроме того, $H \subset g_0(c)$, так что множество $h_0(c') \cap H$ для всех $c' \in C_0$, больших чем c, пусто, и утверждение доказано для $n = 0$. Далее применяем индукцию по n; если существует $c \in C_{n+1}$, для которого $h_{n+1}(c)$ пересекается с H, то из включения $h_{n+1}(c) \subset h_n(p_n(c))$ и предположения индукции вытекает, что $p_n(c)$ есть единственный элемент $d \in C_n$, для которого $h_n(d)$ пересекается с H. Заметим, что $h_n(d)$, содержащееся в $\varphi_n(d)$, по определению просеивания содержится в объединении всех $\varphi_{n+1}(c)$, у которых $c \in p_n^{-1}(d)$; поэтому имеется наименьший элемент $c \in p_n^{-1}(d)$, для которого $\varphi_{n+1}(c)$ пересекается с H. В силу предположения индукции имеем тогда

$$\varphi_{n+1}(c) \cap H \subset \varphi_n(d) \cap H = h_n(d) \cap H.$$

Следовательно,

$$\varphi_{n+1}(c) \cap H \subset \varphi_{n+1}(c) \cap h_n(d),$$

и так как, согласно определению, $\varphi_{n+1}(c) \cap H$ не пересекается ни с одним из множеств $g_{n+1}(c')$, у которых $c' \in p_n^{-1}(d)$ и $c' < c$, то из определения $h_{n+1}(c)$ вытекает, что $\varphi_{n+1}(c) \cap H = h_{n+1}(c) \cap H$. Кроме того, $H \subset g_{n+1}(c)$ и, следовательно, если $c' \in p_n^{-1}(d)$ и $c' > c$, то $h_{n+1}(c') \cap H$ пусто. Таким образом, наше утверждение доказано для всех n.

Пусть теперь S_n для каждого целого n есть объединение множеств $h_n(c)$, где c пробегает C_n; S_n — борелевское множество

и $S_{n+1} \subset S_n$. Пересечение S множеств S_n является борелевским множеством в E; покажем, что S пересекается с каждым классом эквивалентности H по R в одной и только одной точке. В самом деле, пусть $c_n(H)$ для каждого n — тот единственный элемент $c \in C_n$, при котором $h_n(c)$ пересекается с H; тогда $S_n \cap H = \varphi_n(c_n(H)) \cap H$ и $S \cap H$ есть пересечение всех $\varphi_n(c_n(H)) \cap H$. Так как последовательность $(c_n(H))$ принадлежит $L(C)$, то убывающая последовательность замкнутых множеств $\varphi_n(c_n(H))$, диаметр которых стремится к 0, сходится в силу полноты E к некоторой точке $x \in E$. Пересечение замкнутых множеств $\varphi_n(c_n(H)) \cap H$ поэтому сводится к точке x, что и завершает доказательство теоремы 4.

Замечание. В частности, отношение эквивалентности R удовлетворяет предположениям теоремы 4, если оно *замкнуто*. Таким образом, если E — метризуемое компактное пространство, то теорема 4 применима ко всякому отношению эквивалентности R, при котором E/R *отделимо*, поскольку такое R замкнуто (гл. I, § 10, предложение 8).

9. *Емкостность суслинских множеств*

Определение 8. *Пусть E — отделимое топологическое пространство. Емкостью на E называют отображение f множества $\mathfrak{P}(E)$ всех его подмножеств в расширенную числовую прямую $\overline{\mathbf{R}}$, удовлетворяющее следующим условиям:*

($\mathrm{CA_I}$) *$A \subset B$ влечет $f(A) \leqslant f(B)$.*

($\mathrm{CA_{II}}$) *$f\left(\bigcup_n A_n\right) = \sup_n f(A_n)$ для каждой возрастающей последовательности (A_n) множеств из E.*

($\mathrm{CA_{III}}$) *$f\left(\bigcap_n K_n\right) = \inf_n f(K_n)$ для каждой убывающей последовательности (K_n) компактных множеств из E.*

Примеры. °Пусть μ — положительная мера на локально компактном пространстве E; соответствующая *внешняя мера* μ^* является тогда емкостью на E. (См. Интегрирование, гл. IV: определение внешней меры дано в определении 4 § 1; ($\mathrm{CA_I}$) вытекает из предложения 16 § 1; ($\mathrm{CA_{II}}$) — из предложения 17 § 1; ($\mathrm{CA_{III}}$) — из следствия предложения 7 § 4, если принять во внимание, что в силу следствия предложения 10 § 4 всякое компактное множество интегрируемо.

Можно показать, что в пространстве $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 3$, «ньютоновская внешняя емкость» является емкостью в смысле определения 8.°

Определение 9. *Пусть f — емкость на E; множество A в E называется емкостным (относительно f), если $f(A) = \sup_K f(K)$, где K пробегает множество всех компактных подмножеств множества A.*

°Например, если f есть внешняя мера μ^*, то всякое открытое множество емкостно; емкостные множества A, для которых $\mu^*(A) < +\infty$,— не что иное, как μ-интегрируемые множества (см. Интегрирование, гл. IV, § 4, следствия 1 и 4 теоремы 4).°

Предложение 14. *Пусть K — компактное пространство и f — емкость на K. Пересечение A убывающей последовательности (A_n) множеств из K, каждое из которых является объединением счетного семейства замкнутых множеств, есть емкостное множество.*

Достаточно показать, что для каждого $a < f(A)$ существует компактное множество $C \subset A$ такое, что $f(C) \geqslant a$. Докажем сначала существование последовательности $(B_n)_{n \geqslant 1}$ замкнутых множеств $B_n \subset A_n$ таких, что, определяя по индукции последовательность (C_n) условиями $C_0 = A$, $C_n = C_{n-1} \cap B_n$ для $n \geqslant 1$, будем иметь $f(C_n) > a$ для каждого $n \geqslant 0$. Пусть B_i определены для всех $i < n$; согласно предположению $C_{n-1} \subset A \subset A_n$ и $f(C_{n-1}) > a$; так как A_n есть объединение возрастающей последовательности (D_j) замкнутых множеств, то из $(\mathrm{CA_{II}})$ вытекает, что

$$f(C_{n-1}) = \sup_j f(C_{n-1} \cap D_j).$$

Поэтому существует индекс j, для которого $f(C_{n-1} \cap D_j) > a$, и достаточно взять $B_n = D_j$.

Пусть теперь $C = \bigcap_n C_n$; так как $A = \bigcap_n A_n$ и $B_n \subset A_n$, то имеем также $C = \bigcap_n B_n$; значит, множество C компактно и содержится в A. Пусть $B'_n = \bigcap_{i \leqslant n} B_i$, так что (B'_n) — убывающая последовательность компактных множеств. Так как $C_n \subset C_i \subset B_i$ для $i < n$, то имеем также $C_n \subset B'_n$. Поэтому, в силу $(\mathrm{CA_{III}})$, $f(C) = \inf_n f(B'_n)$, а так как $C \subset C_n \subset B'_n$, то также $f(C) = \inf_n f(C_n) \geqslant a$, и предложение доказано.

Теорема 5. *Относительно компактное суслинское подпространство F метризуемого пространства E емкостно относительно любой емкости f на E.*

В самом деле, как мы видели (предложение 9), существуют компактное пространство K, убывающая последовательность (A_n) множеств из K, каждое из которых является объединением счетного семейства компактных множеств, и непрерывное отображение φ пространства K в E, такие, что $F = \varphi\left(\bigcap_n A_n\right)$. По предложению 14 $\bigcap_n A_n$ емкостно относительно каждой емкости на K. Поэтому теорема 5 вытекает из следующего предложения:

Предложение 15. *Пусть φ — непрерывное отображение отделимого пространства K в отделимое пространство E и f — емкость на E. Положим $g(A) = f(\varphi(A))$ для каждого множества A из K. Тогда g — емкость на K, и если, кроме того, A емкостно относительно g, то $\varphi(A)$ емкостно относительно f.*

Ясно, что g удовлетворяет аксиомам (CA_I) и (CA_{II}). С другой стороны, пусть (C_n) — убывающая последовательность компактных множеств из K и $C = \bigcap_n C_n$; множества $\varphi(C_n)$ компактны и их пересечением служит $\varphi(C)$: в самом деле, оно содержит $\varphi(C)$, и если $x \in \varphi(C_n)$ для всех n, то множества $\varphi^{-1}(x) \cap C_n$ образуют убывающую последовательность непустых компактных множеств в K и тем самым имеют непустое пересечение. Поэтому $f(\varphi(C)) = \inf_n f(\varphi(C_n))$, т. е. $g(C) = \inf_n g(C_n)$ и, следовательно, g удовлетворяет аксиоме (CA_{III}), чем доказано, что g— емкость на K. Пусть теперь A — множество в K, емкостное относительно g; если $a < f(\varphi(A)) = g(A)$, то существует компактное множество $C \subset A$, для которого $g(C) \geqslant a$; тогда $\varphi(C)$ есть компактное множество, содержащееся в $\varphi(A)$, и $f(\varphi(C)) \geqslant a$. Это доказывает, что $\varphi(A)$ емкостно относительно f, и завершает доказательство предложения 15 и теоремы 5.

Замечание. °Если μ — положительная мера на метризуемом локально компактном пространстве E, то всякое суслинское множество $A \subset E$ μ-измеримо. В самом деле, $K \cap A$ для каждого компактного

множества K из E есть относительно компактное суслинское множество, следовательно, емкостное относительно μ^* и, значит, μ-интегрируемое. Отметим, что дополнение в E к суслинскому множеству, не будучи вообще суслинским, μ-интегрируемо.

Упражнения

1) а) Всякое раздробленное отделимое пространство вполне регулярно. Локально компактные не нормальные пространства, определенные в упражнении 26б) § 4 и упражнении 15 § 5, *являются* раздробленными пространствами.

б) Топологическое пространство E называется *сильно раздробленным*, если для каждого замкнутого множества A в E и каждой его окрестности U существует открыто-замкнутая окрестность множества A, содержащаяся в U. Всякое сильно раздробленное отделимое пространство нормально. Всякое вполне несвязное компактное пространство является сильно раздробленным. Для того чтобы нормальное пространство E было сильно раздробленным, необходимо и достаточно, чтобы его компактификация Стоуна — Чеха $\widetilde{E}$ (§ 1, упражнение 7) была вполне несвязна. [Использовать упражнение 17в) § 4.]

в) Пусть E — сильно раздробленное отделимое пространство и (U_n) — возрастающая последовательность непустых открытых множеств из E. Показать, что в E существует последовательность (G_n) попарно непересекающихся открыто-замкнутых множеств таких, что $G_n \subset U_n$ для всех n и $\bigcup_n G_n = \bigcup_n U_n$. [Определить G_n по индукции.] Если, кроме того, E совершенно нормально (§ 4, упражнение 8), то всякое открытое множество в E является объединением счетного семейства попарно непересекающихся открыто-замкнутых множеств.

г) Пусть E — нормальное пространство, являющееся объединением последовательности (A_n) своих сильно раздробленных подпространств. Показать, что E — сильно раздробленное пространство. [Пусть B и C — непересекающиеся замкнутые множества в E. Определить по индукции возрастающие последовательности (G_n) и (H_n) открытых множеств в E таких, что $\overline{G}_n \cap \overline{H}_n = \varnothing$, $A_n \subset G_n \cup H_n$ и $B \cap A_n \subset G_n$, $C \cap A_n \subset H_n$.]

*2) а) Пусть E — метризуемое пространство. Показать равносильность следующих свойств:

α) существует расстояние, согласующееся с топологией пространства E и превращающее E в ультраметрическое пространство (§ 2, упражнение 4);

β) E — сильно раздробленное пространство (упражнение 1);

γ) в E существует последовательность $(\mathfrak{B}_n)$ локально конечных семейств открыто-замкнутых множеств, такая, что $\mathfrak{B} = \bigcup_n \mathfrak{B}_n$ есть базис его топологии в E.

[Чтобы убедиться в том, что α) влечет β), заметить, что если F — замкнутое множество в ультраметрическом пространстве E, то множество тех $x \in E$, для которых $d(x, F) = \rho > 0$, открыто-замкнуто. Чтобы показать, что β) влечет γ), использовать лемму 4 § 4 и упражнение 1в) § 6. Наконец, установление того, что γ) влечет α), свести к случаю, когда $\mathfrak{B}_n = (U_{n,\lambda})_{\lambda \in L}$ и, обозначив через $f_{n,\lambda}$ характеристическую функцию множества $U_{n,\lambda}$, рассмотреть отображение $x \mapsto f(x) = (f_{n,\lambda}(x))$ пространства E в группу $G = H^{\mathbf{N} \times L}$, где $H = \mathbf{Z}/(2)$ (отождествленное с множеством $\{0, 1\}$); пусть G_n для каждого $n \in \mathbf{N}$ — подгруппа группы G, состоящая из всех элементов, проекции которых с индексом (k, λ) равны нулю для всех $\lambda \in L$ и всех $k < n$; показать, что f — гомеоморфизм пространства E на подпространство группы G, наделенной групповой топологией, для которой (G_n) служит фундаментальной системой окрестностей 0; в заключение заметить, что топология группы G может быть задана инвариантным расстоянием, превращающим G в ультраметрическое пространство.]

б) Вывести из а), что всякое раздробленное отделимое пространство E, обладающее счетным базисом, есть сильно раздробленное метризуемое пространство. [Используя предложение 13 § 2, показать, что существует счетный базис, состоящий из открыто-замкнутых множеств.] Кроме того, E гомеоморфно тогда подпространству канторового множества K (см. § 2, упражнение 12) *).

3) а) Показать, что всякое вполне несвязное подпространство пространства $\mathbf{R}$ — раздробленное.

б) Пусть K — канторово множество; каждое $x \in K$ записывается единственным образом в виде $x = \sum_k \frac{2}{3^{n_k}}$, где $(n_k)_{k \geqslant 1}$ — строго возрастающая (конечная или бесконечная) последовательность целых чисел > 0 (гл. IV, § 8, упражнение 9); положим $f(x) = \sum_k (-1)^{n_k}/2^k$. Пусть G — график функции f в $K \times \mathbf{R}$; показать, что метризуемое пространство G вполне несвязно, но не является раздробленным. [Заметить, что пересечение $\overline{G}$ с прямой $\{0\} \times \mathbf{R}$ содержит открытый интервал, содержащий точку (0, 0).]

4) Пусть E — метризуемое пространство.

а) Показать, что множество всех борелевских подмножеств пространства E есть наименьшее подмножество $\mathfrak{F}$ множества $\mathfrak{P}(E)$, содер-

*) Неизвестно, всякое ли раздробленное метризуемое пространство является сильно раздробленным.

жащее все замкнутые множества из E и обладающее тем свойством, что объединение и пересечение всякого счетного множества из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$. [Рассмотреть подмножество $\mathfrak{G}$ множества $\mathfrak{F}$, образованное теми $X \in \mathfrak{F}$, для которых $E - X \in \mathfrak{F}$.]

б) Показать, что множество всех борелевских подмножеств пространства E есть наименьшее подмножество $\mathfrak{F}$ множества $\mathfrak{P}(E)$, содержащее все открытые множества из E и обладающее тем свойством, что пересечение всякого счетного семейства множеств из $\mathfrak{F}$, а также объединение всякой последовательности попарно непересекающихся множеств из $\mathfrak{F}$ принадлежат $\mathfrak{F}$. [Тот же метод.]

в) Всякое ординальное число α может быть записано, и притом единственным образом, в виде $\alpha = \omega\beta + n$, где $n < \omega$ (Теор. множ., гл. III § 2, упражнение 14); α называют *четным* (соотв. *нечетным*), если n четно (соотв. нечетно). Определим с помощью трансфинитной индукции для каждого счетного ординального числа α множества подмножеств $\mathfrak{F}_\alpha(E)$ $\mathfrak{G}_\alpha(E)$ (или просто $\mathfrak{F}_\alpha$, $\mathfrak{G}_\alpha$) следующим образом: $\mathfrak{F}_0$ (соотв. $\mathfrak{G}_0$) есть множество всех замкнутых (соотв. открытых) множеств из E; если α четно и > 0, то $\mathfrak{F}_\alpha$ (соотв. $\mathfrak{G}_\alpha$) есть множество тех множеств из E, которые являются пересечениями (соотв. объединениями) счетного семейства множеств, принадлежащих $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathfrak{F}_\xi$ (соотв. $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathfrak{G}_\xi$); если α нечетно, то $\mathfrak{F}_\alpha$ (соотв. $\mathfrak{G}_\alpha$) есть множество тех множеств из E, которые являются объединениями (соотв. пересечениями) счетного семейства множеств, принадлежащих $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathfrak{F}_\xi$ (соотв. $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathfrak{G}_\xi$). Показать, что объединение всех $\mathfrak{F}_\alpha$ (соотв. всех $\mathfrak{G}_\alpha$) есть множество всех борелевских подмножеств пространства E. [Использовать а).] Вывести отсюда, что если E — счетного типа, то мощность множества всех его борелевских подмножеств не превышает мощности континуума.

г) $X \in \mathfrak{F}_\alpha$ тогда и только тогда, когда $\complement X \in \mathfrak{G}_\alpha$. Объединение (соотв. пересечение) всякого *конечного* семейства множеств из $\mathfrak{F}_\alpha$ (соотв. из $\mathfrak{G}_\alpha$) принадлежит $\mathfrak{F}_\alpha$ (соотв. $\mathfrak{G}_\alpha$). Справедливы включения

$$\mathfrak{F}_\alpha \subset \mathfrak{F}_{\alpha+1} \cap \mathfrak{G}_{\alpha+1} \quad \text{и} \quad \mathfrak{G}_\alpha \subset \mathfrak{F}_{\alpha+1} \cap \mathfrak{G}_{\alpha+1}.$$

[Применить трансфинитную индукцию.]

д) Пусть f — непрерывное отображение пространства E в метризуемое пространство F. Показать, что

$$f^{-1}(\mathfrak{F}_\alpha(F)) \subset \mathfrak{F}_\alpha(E) \quad \text{и} \quad f^{-1}(\mathfrak{G}_\alpha(F)) \subset \mathfrak{G}_\alpha(E).$$

е) Если E и F — метризуемые пространства, то всякое произведение $A \times B$, где $A \in \mathfrak{F}_\alpha(E)$, $B \in \mathfrak{F}_\alpha(F)$, (соотв. $A \in \mathfrak{G}_\alpha(E)$, $B \in \mathfrak{G}_\alpha(F)$), принадлежит $\mathfrak{F}_\alpha(E \times F)$ (соотв. $\mathfrak{G}_\alpha(E \times F)$).

ж) Пусть (E_n) — последовательность метризуемых пространств. Показать, что если A_n для каждого n — борелевское множество из E_n, то $\prod_n A_n$ — борелевское множество в $\prod_n E_n$.

з) Пусть $\alpha > 0$ — четное (соотв. нечетное) счетное ординальное число и (A_n) — счетное покрытие пространства E, состоящее из множеств, принадлежащих $\mathfrak{G}_\alpha$ (соотв. $\mathfrak{F}_\alpha$). Показать, что существует разбиение (B_n) пространства E такое, что $B_n \subset A_n$ для всех n, причем B_n принадлежат $\mathfrak{F}_\alpha \cap \mathfrak{G}_\alpha$. [Использовать г).]

*5) а) Пусть J — польское пространство $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ (где $\mathbf{N}$ наделено дискретной топологией) и E — метризуемое пространство счетного типа. Показать, что для каждого счетного ординального числа α существует множество $G_\alpha \subset J \times E$ такое, что: 1° $G_\alpha \subset \mathfrak{G}_\alpha(J \times E)$ (упражнение 4); 2° для каждого множества $U \in \mathfrak{G}_\alpha(E)$ существует такое $z \in J$, что $G_\alpha(z) = U$. [Рассуждение можно вести с помощью трансфинитной индукции следующим образом. Пространства J и $J^{\mathbf{N}}$ гомеоморфны; пусть f — гомеоморфизм J на $J^{\mathbf{N}}$, $f_n = \mathrm{pr}_n \circ f$ для каждого целого n и (A_n) — счетный базис пространства E, содержащий пустое множество. Выбираем G_0 так, чтобы $G_0(z) = \bigcup_n A_{f_n(z)}$ для каждого $z \in J$. Для каждого счетного ординального числа α берем $G_{\alpha+1}$ так, чтобы $G_{\alpha+1}(z) = \bigcap_n G_\alpha(f_n(z))$, если α — четное, и $G_{\alpha+1}(z) = \bigcup_n G_\alpha(f_n(z))$, если α — нечетное. Наконец, если α не имеет предшествующего числа и (λ_n) — возрастающая последовательность ординальных чисел такая, что $\alpha = \sup_n \lambda_n$, то берем G_α так, чтобы $G_\alpha(z) = \bigcup_n G_{\lambda_n}(f_n(z))$. Используем непрерывность f_n на J.]

б) Примем, в частности, $E = J$. Показать, что множество $\mathrm{pr}_1(G_\alpha \cap \Delta)$, где Δ — диагональ произведения $J \times J$, принадлежит $\mathfrak{G}_\alpha(J)$, но не принадлежит $\mathfrak{F}_\alpha(J)$. [Рассуждать от противного, используя а).]

6) а) Пусть J — польское пространство $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$; показать, что для каждого суслинского пространства E существует сюръективное непрерывное отображение J на E. [Свести к случаю, когда E — польское, и рассмотреть просеивание пространства E репетом (C_n), где все C_n бесконечны.]

б) Пусть E — метризуемое пространство; показать, что для каждого его суслинского подпространства A существует замкнутое множество F в $J \times E$ такое, что $A = \mathrm{pr}_2(F)$. [Использовать а).]

в) Пусть E — метризуемое пространство счетного типа, L — пространство $J \times E$ и F — замкнутое множество в $J \times L$ такое, что

для каждого замкнутого множества M из L существует $z \in J$, для которого $F(z) = M$ (упражнение 5а). Показать, что для каждого суслинского подпространства S пространства E существует $z \in J$ такое, что $\mathrm{pr}_2(F(z)) = S$. Вывести отсюда, что если $E = J$, то множество T тех $z \in J$, для которых $z \in \mathrm{pr}_2(F(z))$,— суслинское, но $J - T$ — не суслинское. [Такое же рассуждение, что и в упражнении 5б).] *)

7) а) Показать, что всякое раздробленное польское пространство E гомеоморфно замкнутому подпространству пространства $J = \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. [Рассмотреть строгое просеивание пространства E открыто-замкнутыми множествами.]

б) Пусть E — раздробленное польское пространство и F — всюду плотное его подпространство, не содержащее внутренних точек и являющееся пересечением счетного семейства открытых множеств в E. Показать, что F гомеоморфно J. [Заметить, что в раздробленном метризуемом пространстве незамкнутое открытое множество есть объединение счетно-*бесконечной* последовательности попарно непересекающихся открыто-замкнутых множеств; использовать теорему 1.] Вывести отсюда, что в $\mathbf{R}$ всякое всюду плотное подпространство не имеющее внутренних точек и являющееся пересечением счетного семейства открытых множеств, гомеоморфно J. [Заметить, что такое множество содержится в дополнении всюду плотного счетного множества D из $\mathbf{R}$ и что $\mathbf{C}D$ — раздробленное.]

в) Всякое несчетное раздробленное польское пространство E допускает разбиение на счетное множество и подпространство, гомеоморфное J. [Использовать б) и упражнение 11 § 5.]

8) Пусть E — суслинское пространство и f — непрерывное отображение его в отделимое пространство F. Показать, что если $f(E)$ несчетно, то существует подпространство A пространства E, гомеоморфное канторову множеству K (гл. IV, § 2, n° 5), такое, что сужение f на A инъективно. [Свести к случаю, когда E — полное метрическое пространство. Показать, что существуют решето $C = (C_n, p_n)$, где множество C_n для каждого n состоит из 2^n элементов, и для каждого n — отображение φ_n множества C_n в множество всех непустых замкнутых множеств диаметра $\leqslant 2^{-n}$ из E такие, что: 1° $\varphi_{n+1}(c) \subset \subset \varphi_n(p_n(c))$ для каждого $c \in C_{n+1}$; 2° для различных элементов c, c' из C_n множества $f(\varphi_n(c))$ и $f(\varphi_n(c'))$ не пересекаются. Использовать упражнение 11 § 5.] В частности, всякое несчетное суслинское пространство содержит подпространство, гомеоморфное K, и, следовательно, имеет мощность континуума.

---

*) °Можно показать, что в пространстве $\mathscr{C}(I)$ всех непрерывных числовых функций на компактном интервале $I \subset \mathbf{R}$, наделенном топологией равномерной сходимости (являющемся польским пространством), множество всех дифференцируемых функций не является суслинским, но имеет суслинское дополнение (см. S. Mazurkiewicz, Fund. Math., т. XXVII (1936), стр. 244).°

*9) а) Пусть E — польское пространство и R — отношение эквивалентности в E. Показать, что в E существует множество, являющееся пересечением счетного семейства открытых множеств и пересекающееся с каждым классом эквивалентности по R в одной, и только одной, точке, коль скоро выполняется одно из следующих двух предположений:

α) R замкнуто. [Следовать методу доказательства теоремы 4, используя следующее замечание: если (G_n) — последовательность множеств, каждое из которых есть пересечение счетного семейства открытых множеств, и если для каждого n существует окрестность V_n множества G_n, такая, что семейство (V_n) локально конечно, то $\bigcup_n G_n$ есть пересечение счетного семейства открытых множеств.]

β) E локально компактно и график отношения R замкнут в $E \times E$. [Тот же метод с учетом того, что насыщение компактного множества тогда замкнуто; см. гл. I, 2-е изд., § 10, упражнение 14а); 3-е изд., § 10, упражнение 16.]

б) Пусть E — польское пространство, R — открыто-замкнутое отношение эквивалентности в E и φ — каноническое отображение E на E/R. Показать, что в E существует множество A, являющееся пересечением счетного семейства открытых множеств и такое, что сужение φ на A есть гомеоморфизм A на $\varphi(A)$, причем $\varphi(A)$ всюду плотно в E/R и является пересечением счетного семейства открытых множеств. [В обозначениях доказательства теоремы 4 показать, что для всякого n можно предполагать $\varphi_n(c)$ определенным так, чтобы объединение внутренностей множеств $h_n(c)$ $(c \in C_n)$ имело всюду плотный образ в E/R; использовать а) и теорему 1.]

в) Показать, что заключение пункта б) остается в силе, если E — локально компактное пространство со счетным базисом, а R — замкнутое отношение эквивалентности в E, всякий класс по которому компактен. [Свести к случаю б), используя упражнение 26 § 5.]

*10) а) Пусть E — метризуемое пространство и S — его суслинское подпространство. Показать, что множество S приближаемо в E (§ 5, упражнение 6). [Пусть P — польское пространство, g — непрерывное отображение P на S, (C_n, p_n, φ_n) — просеивание пространства P и f — соответствующее непрерывное отображение $L(C)$ на P (в обозначениях n° 5); положим $h = g \circ f$ и для каждого $c \in C_n$ обозначим через $q_n(c)$ подпространство пространства $L(C)$, образованное всеми последовательностями (c_k), у которых $c_n = c$. Пусть $F_n(c) = h(q_n(c))$, $X_n(c) = g(\varphi_n(c)) \supset F_n(c)$ для каждого $c \in C_n$; обозначим через $Z_n(c)$ такое объединение множества $D(F_n(c))$ (§ 5, упражнение 3) и некоторого тощего множества в E, что $F_n(c) \subset Z_n(c) \subset \overline{X_n(c)}$, так что $Z_n(c)$ приближаемо в E. Показать, что

$$Z_n(c) \cap C\Big(\bigcup_{p_n(c')=c} Z_{n+1}(c')\Big) = Y_n(c)$$

— тощее множество в E, заметив, что $F_n(c) = \bigcup_{p_n(c')=c} F_{n+1}(c')$; с другой стороны, доказать, что множество $Z_n(c) - F_n(c)$ содержится в объединении множеств $Y_m(d)$, где m пробегает все целые числа $\geqslant n$, а d для каждого m — множество всех элементов из C_m таких, что $p_{nm}(d) = c$. Заключить, что $F_n(c)$ — приближаемое множество.]

б) Дать пример непрерывного отображения f интервала $I = [0, 1]$ в себя и приближаемого множества $B \subset I$, для которого $f(B)$ не было бы приближаемым. [Использовать упражнение 16б) § 8 гл. IV и показать, что в качестве B можно взять подмножество канторова множества K, для которого $f(B) = Z$ обладает свойством, описанным в упражнении 18г) § 5.]

*11) Пусть $E = \mathbf{R}^n$ и M — замкнутое множество в E. Точка $x \in M$ называется *линейно достижимой*, если в $E - M$ существует точка y такая, что открытый отрезок с концами x и y содержится в $E - M$. Показать, что множество $L \subset M$ линейно достижимых точек множества M — суслинское. [Пусть $d(x, y)$ — евклидово расстояние на E и $f_z(x, y) = d(x, z) + d(z, y) - d(x, y)$ для каждой точки $z \in E$. Заметить, что в $E \times E \times E$ множество точек (x, y, z) таких, что $x \in M$, $y \in E - M$, $z \in M$, $z \neq x$ и $f_z(x, y) = 0$, есть объединение счетного семейства компактных множеств и что, следовательно, то же справедливо для его проекции на произведение первых двух сомножителей.]

12) Пусть E — метризуемое пространство и f — отображение множества $\mathfrak{K}(E)$ всех компактных множеств из E в $\overline{\mathbf{R}}$, удовлетворяющее условиям (CA_I) (для двух компактных множеств из E) и (CA_{III}). Для каждого множества $A \subset E$ обозначим через $f_*(A)$ верхнюю грань значений $f(X)$ для всевозможных компактных подмножеств X множества A и через $f^*(A)$ нижнюю грань значений $f_*(U)$ для всевозможных открытых множеств U, содержащих A. Будем говорить, что A *допустимо* для f, если $f_*(A) = f^*(A)$.

а) Показать, что для каждого компактного множества K из E и каждого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $U \supset K$, обладающее тем свойством, что для всех компактных множеств X из E таких, что $K \subset X \subset U$, имеет место неравенство

$$f(X) \leqslant f(K) + \varepsilon.$$

[Рассуждать от противного.] Вывести отсюда, что всякое компактное и всякое открытое множество в E допустимо для f.

б) Предположим, что f удовлетворяет следующему условию:

(AL) Для всякой пары компактных множеств K, K' из E имеет место неравенство

$$f(K \cup K') + f(K \cap K') \leqslant f(K) + f(K').$$

Показать, что если (K_i) — конечное семейство компактных множеств такое, что $f\left(\bigcup_i K_i\right) < +\infty$, и (K'_i) — второе конечное семейство компактных множеств с тем же множеством индексов, такое, что $K'_i \subset K_i$ и $f(K'_i) > -\infty$ для каждого i, то

$$f\left(\bigcup_i K_i\right) - f\left(\bigcup_i K'_i\right) \leqslant \sum_i (f(K_i) - f(K'_i)).$$

Пусть (A_i) и (B_i) — конечные семейства множеств из E с одним и тем же множеством индексов такие, что $B_i \subset A_i$ для всех i, $f^*\left(\bigcup_i A_i\right) < +\infty$ и $f^*(B_i) > -\infty$ для каждого i. Показать, что если f удовлетворяет условию (AL), то

$$f^*\left(\bigcup_i A_i\right) - f^*\left(\bigcup_i B_i\right) \leqslant \sum_i (f^*(A_i) - f^*(B_i)).$$

[Свести к случаю, когда множество индексов состоит из двух элементов. Рассмотреть сначала случай, когда A_i и B_i открыты, и использовать следующую лемму: если U_1 и U_2 — открытые множества и K — компактное множество такое, что $K \subset U_1 \cup U_2$, то существуют компактные множества $K_1 \subset U_1$ и $K_2 \subset U_2$ такие, что $K \subset K_1 \cup K_2$.]

в) Предположим, что f удовлетворяет условию (AL). Показать, что $f^*\left(\bigcup_n A_n\right) = \sup_n f^*(A_n)$ для всякой возрастающей последовательности (A_n) множеств из E таких, что $f^*(A_n) > -\infty$. [Использовать б).] Вывести отсюда, что если f не принимает на $\mathfrak{R}(E)$ значения $-\infty$, то f^* есть емкость на E.

г) Предположим, что f удовлетворяет условию (AL). Показать, что объединение всякой последовательности (A_n) допустимых множеств таких, что $f^*(A_n) > -\infty$, есть допустимое множество. [Использовать б) и в).]

°13) Пусть K — компактное множество в $\mathbf{R}^2$. Для каждого вещественного числа y обозначим через $\delta_1(K, y)$ и $\delta_2(K, y)$ диаметры пересечений K соответственно с $[0, +\infty[\times \{y\}$ и $]-\infty, 0] \times \{y\}$. Показать, что функции $y \longmapsto \delta_1(K, y)$ и $y \longmapsto \delta_2(K, y)$ полунепрерывны сверху. Пусть φ — непрерывное возрастающее отображение интервала $[0, +\infty]$ в себя такое, что $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(+\infty) = 2$; положим

$$\psi(K, y) = \varphi(\delta_1(K, y)\, \delta_2(K, y)) \quad \text{и} \quad f(K) = \int_{\mathrm{pr}_2(K)} \psi(K, y)\, dy.$$

Показать, что f удовлетворяет условиям $(\mathrm{CA_I})$ и $(\mathrm{CA_{III}})$ и что $f(K \cup K') \leqslant f(K) + f(K')$ для всякой пары компактных множеств

K, K' из $\mathbf{R}^2$. Но для замкнутого множества A, определяемого неравенствами $x \geqslant 0$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$, $f_*(A) = 1$, а $f^*(A) = 2$.

14) Пусть E — метризуемое пространство и f — емкость на E такая, что

$$f(A \cup B) \leqslant f(A) + f(B).$$

а) В обозначениях упражнения 12 показать, что для произвольных множеств A, B из E имеют место неравенства

$$f^*(A \cup B) \leqslant f^*(A) + f^*(B),$$

$$f_*(A \cup B) \leqslant f_*(A) + f^*(B).$$

[Рассматривая компактные множества $K \subset A \cup B$ и открытые множества $U \supset B$, представить K в виде $K = (K \cap U) \cup (K \cap \mathbf{C}U)$.]

б) Пусть K — компактное множество в E, имеющее мощность континуума, и (A, B) — разбиение K на два множества, любое компактное подмножество каждого из которых не более чем счетно (см. § 5, упражнение 18г)). Показать, что если $f(\{x\}) = 0$ для всякого одноточечного множества и $f(K) > 0$, то ни A ни B не емкостны относительно f.

°15) Пусть μ — лебегова мера на $\mathbf{R}$; определим емкость f на $\mathbf{R}^2$, удовлетворяющую условию (AL) упражнения 12, положив $f(A) = \mu^*(\mathrm{pr}_1 A)$ (предложение 15).

а) Пусть A — не емкостное (упражнение 14) ограниченное множество в $\mathbf{R}^2$, B_0 — окружность $\| x \| = r$ такая, что A содержится в открытом круге $\| x \| < r$, и B_1 — окружность $\| x \| = r'$ радиуса $r' > r$. Показать, что $A \cup B_0$ и $A \cup B_1$ емкостны, тогда как их пересечение A не емкостно.

б) Пусть C_n для каждого n означает множество тех $x \in \mathbf{R}^2$, для которых

$$r < \| x \| < r + \frac{1}{n}.$$

Показать, что каждое из множеств $A \cup C_n$ емкостно, а их пересечение не емкостно, и что $\inf f(C_n) \neq f\left(\bigcap_n C_n\right)$.

*16) Пусть E и E' — метризуемые пространства. Отображение f пространства E в E' называется *борелевским*, если прообраз $f^{-1}(F')$ каждого замкнутого множества F' из E' есть борелевское множество в E. Пусть α — четное (соотв. нечетное) счетное ординальное число; f называется отображением *класса* α, если прообраз $f^{-1}(F')$ каждого замкнутого множества F' из E' принадлежит $\mathfrak{F}_\alpha(E)$ (соотв. $\mathfrak{G}_\alpha(E)$) (упражнение 4); тогда $f^{-1}(G')$ для каждого открытого множества G' из E' принадлежит $\mathfrak{G}_\alpha(E)$ (соотв. $\mathfrak{F}_\alpha(E)$). Борелевские функции класса 0 — непрерывные функции.

а) Для того чтобы характеристическая функция φ_A множества $A \subset E$ была функцией класса α, необходимо и достаточно, чтобы A принадлежало $\mathfrak{F}_\alpha \cap \mathfrak{G}_\alpha$.

б) Пусть f — отображение класса α пространства E в E'; показать, что прообраз $f^{-1}(B')$ каждого множества $B' \in \mathfrak{F}_\beta(E')$ (соотв. $B' \in \mathfrak{G}_\beta(E')$) принадлежит $\mathfrak{F}_{\alpha+\beta}(E)$ (соотв. $\mathfrak{G}_{\alpha+\beta}(E)$). [Применить трансфинитную индукцию по β.]

в) Пусть f — отображение класса α пространства E в E' и g — отображение класса β пространства E' в метризуемое пространство E''; показать, что $g \circ f$ есть отображение класса $\alpha + \beta$.

г) Пусть α — произвольное четное (соответственно нечетное) счетное ординальное число и (A_n) — последовательность множеств из E, принадлежащих $\mathfrak{G}_\alpha$ (соотв. $\mathfrak{F}_\alpha$), покрывающая E; если отображение f пространства E в E' таково, что его сужение на каждое A_n принадлежит классу α, то f — класса α. Аналогичный результат для *конечной* последовательности множеств из E, принадлежащих $\mathfrak{F}_\alpha$ (соотв. $\mathfrak{G}_\alpha$), образующих покрытие E.

17) а) Пусть E — метризуемое пространство, E' — метризуемое пространство счетного типа со счетным базисом топологии (U'_n) и α — четное (соотв. нечетное) счетное ординальное число; если отображение f пространства E в E' таково, что все $f^{-1}(U'_n)$ принадлежат $\mathfrak{G}_\alpha(E)$ (соотв. $\mathfrak{F}_\alpha(E)$), то f — класса α.

б) Пусть (E'_n) — последовательность метризуемых пространств счетного типа. Для того чтобы отображение $f = (f_n)$ пространства E в $\prod_n E'_n$ принадлежало классу α, необходимо и достаточно, чтобы каждое f_n принадлежало классу α. [Использовать *а*).] Вывести отсюда, что если E счетного типа, то конечные числовые функции класса α на E образуют кольцо.

в) Пусть E и E' — метризуемые пространства счетного типа и α — четное (соотв. нечетное) счетное ординальное число. Показать, что если отображение f пространства E в E' принадлежит классу α, то его график принадлежит $\mathfrak{F}_\alpha(E \times E')$ (соотв. $\mathfrak{G}_\alpha(E \times E')$). [Использовать б) и упражнение 16б).]

18) Пусть E — суслинское пространство, E' — метризуемое пространство счетного типа и f — отображение E в E'.

а) Показать, что если график G отображения f есть суслинское множество в $E \times E'$, то f — борелевская функция (и, следовательно (упражнение 17в)), G — борелевское множество). [Использовать следствие теоремы 2.]

б) Показать, что если f инъективно и борелевское, а E' суслинское, то $f(A)$ — суслинское множество в E' для всякого суслинского

подпространства A пространства E. [Использовать упражнение 17в).] Если f биективно, то обратное отображение — борелевское.

19) Пусть E и E' — метризуемые пространства и f — приближаемое (§ 5, упражнение 24) отображение E в E'. Показать, что $f^{-1}(B')$ — приближаемое множество в E для всякого борелевского множества $B' \subset E'$. [См. § 5, упражнение 6.] Вывести отсюда, что если g — борелевское отображение пространства E' в метризуемое пространство E'', то $g \circ f$ — приближаемое отображение. Дать пример непрерывного отображения f и приближаемого отображения g, для которых отображение $g \circ f$ не было бы приближаемым. [См. упражнение 10б).]

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ IX

БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ В НОРМИРОВАННЫХ АЛГЕБРАХ

1. *Перемножаемые последовательности в нормированной алгебре*

Пусть A — нормированная алгебра над недискретным коммутативным нормированным телом K (§ 3, определение 9); обозначим через $\| x \|$ норму элемента $x \in A$ и будем предполагать, что она удовлетворяет неравенству $\| xy \| \leqslant \| x \| \, \| y \|$; кроме того, предположим, что A обладает единицей e.

Пусть $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ — бесконечная последовательность точек из A; всякое *конечное* множество $J \subset \mathbf{N}$, совершенно упорядоченное порядком из N, определяет *серию* (Алгебра, гл. I, § 1, n° 2) $(x_n)_{n \in J}$ точек из A; в Алгебре (там же) было определено *произведение* $p_J = \prod_{n \in J} x_n$ этой серии; мы будем называть его *конечным частичным произведением* последовательности $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, соответствующим конечному множеству $J \subset \mathbf{N}$ (напомним, что для $J = \varnothing$ полагают $\prod_{n \in \varnothing} x_n = e$).

Определение 1. *Последовательность $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ в нормированной алгебре A называется перемножаемой, если отображение $J \mapsto p_J$ имеет предел по фильтру сечений множества $\mathfrak{F}(\mathbf{N})$ всех конечных подмножеств множества* N, *упорядоченному отношением $\subset$; этот предел называется произведением последовательности $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ и обозначается $\prod_{n \in \mathbf{N}} x_n$ (или просто $\prod_n x_n$); элементы x_n называются сомножителями этого произведения.*

Определение 1 равносильно следующему: *последовательность (x_n) перемножаема и имеет произведение p, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечное множество $J_0 \subset \mathbf{N}$ такое, что $\| p_J - p \| \leqslant \varepsilon$ для всех конечных множеств $J \supset J_0$ из* N.

Замечания. 1) Если A — коммутативная алгебра, то определение 1 совпадает с определением, данным в n° 1 § 4 гл. III 2-го изд. (3-е изд., § 5) (замечание 3); но если алгебра A не коммутативна, то структура *порядка* в множестве индексов N играет в определении 1 существенную роль; беря какую-либо перестановку σ множества N, мы отнюдь не можем тогда утверждать вообще, что последовательность $(x_{\sigma(n)})$ перемножаема, коль скоро перемножаема последовательность (x_n); кроме того, если эти две последовательности и перемножаемы, их произведения вообще различны.

2) Определение 1 непосредственно обобщается на случай семейства $(x_n)_{n \in I}$, множество I индексов которого есть подмножество множества Z (совершенно упорядоченное порядком, индуцируемым из Z); предоставляем читателю распространить на этот случай излагаемые ниже свойства (см. упражнения 1 и 2).

2. *Критерии перемножаемости*

В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда нормированная алгебра A *полна*.

Теорема 1. *Пусть $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ — последовательность точек полной нормированной алгебры A.*

а) *Если (x_n) перемножаема и имеет своим произведением обратимый элемент из A, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечное множество $J_0 \subset \mathbf{N}$ такое, что $\| e - p_L \| \leqslant \varepsilon$ для каждого конечного множества $L \subset \mathbf{N}$, не пересекающегося с J_0.*

б) *Обратно, если последовательность (x_n) удовлетворяет этому условию, то она перемножаема. При этом, если каждое x_n обратимо, то и $\prod_{n \in \mathbf{N}} x_n$ обратимо.*

а) Пусть p — произведение перемножаемой последовательности (x_n), причем p обратимо в A; тогда (§ 3, предложение 13) существуют $\alpha > 0$ и $a > 0$ такие, что всякий элемент $y \in A$, для которого $\| y - p \| \leqslant \alpha$, обратим и $\| y^{-1} \| \leqslant a$. По предположению, для каждого ε, удовлетворяющего неравенствам $0 < \varepsilon < \alpha$, существует конечное множество $H_0 \subset \mathbf{N}$ такое, что $\| p_H - p \| \leqslant \varepsilon$

для всякого конечного множества $H \subset \mathbf{N}$, содержащего H_0. Пусть $J_0 = [0, m]$ — интервал из $\mathbf{N}$, содержащий H_0; для каждого конечного множества $L \subset \mathbf{N}$, не пересекающегося с J_0, любое целое число, принадлежащее L, превосходит все целые числа, принадлежащие H_0; следовательно, положив $H = H_0 \cup L$, будем иметь $p_H = p_{H_0} p_L$. Но так как $\| p_{H_0} - p \| \leqslant \varepsilon \leqslant \alpha$, то p_{H_0} обратимо и $\| e - p_{H_0}^{-1} p \| \leqslant \varepsilon \| p_{H_0}^{-1} \| \leqslant a\varepsilon$; из неравенства $\| p_{H_0} p_L - p \| \leqslant \varepsilon$ следует, что $\| p_L - p_{H_0}^{-1} p \| \leqslant \varepsilon \| p_{H_0}^{-1} \| \leqslant a\varepsilon$ и, наконец, $\| e - p_L \| \leqslant 2a\varepsilon$.

б) Предположим, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечное множество $J_0 \subset \mathbf{N}$ такое, что $\| e_i - p_L \| \leqslant \varepsilon$ для всякого не пересекающегося с J_0 конечного множества $L \subset \mathbf{N}$. Пусть $H_0 = [0, p]$ — интервал из $\mathbf{N}$, содержащий J_0; всякое конечное множество H из $\mathbf{N}$, содержащее H_0, может быть записано в виде $H_0 \cup L$, где каждое целое число, содержащееся в L, превосходит все целые числа, принадлежащие H_0; поэтому $p_H = p_{H_0} p_L$, и так как L не пересекается с J_0, то $\| p_H - p_{H_0} \| \leqslant \varepsilon \| p_{H_0} \|$, откуда $\| p_H \| \leqslant (1 + \varepsilon) \| p_{H_0} \|$. Если $p_{H_0} = 0$, то последовательность (x_n), очевидно, перемножаема и имеет произведением 0; если отбросить этот тривиальный случай, существует интервал $H_1 = [0, q]$, содержащий H_0 и такой, что $\| e - p_L \| \leqslant \varepsilon \| p_{H_0} \|^{-1}$ для всякого конечного множества $L \subset \mathbf{N}$ непересекающегося с H_1. Как и выше, отсюда следует, что

$$\| p_H - p_{H_1} \| \leqslant (\| p_{H_0} \|)^{-1} \| p_{H_1} \| \varepsilon \leqslant \varepsilon (1 + \varepsilon)$$

для каждого конечного множества H из $\mathbf{N}$, содержащего H_1. Критерий Коши показывает тогда, что $J \mapsto p_J$ имеет предел в A по фильтрующемуся множеству $\mathfrak{F}(\mathbf{N})$.

Если все x_n обратимы, то то же верно и для всех конечных частичных произведений p_J; поэтому для всякого конечного множества $H \subset \mathbf{N}$, содержащего H_0, будем иметь $\| e - p_{H_0}^{-1} p_H \| \leqslant \varepsilon$; это показывает, что в мультипликативной группе G всех обратимых элементов из A образ фильтра сечений множества $\mathfrak{F}(\mathbf{N})$ при отображении $J \mapsto p_J$ является базисом фильтра Коши относительно левой равномерной структуры группы G; а так как G *полна* (гл. IX, § 3, предложение 13), то предел отображения $J \mapsto p_J$ принадлежит G.

Замечание. Если (x_n) перемножаемо и его произведение не допускает обращения, то теорема 1 может не выполняться. Например, если все x_n равны одному и тому же элементу x такому, что $\| x \| < 1$, то последовательность (x_n) перемножаема и имеет произведением 0, а для любого непустого конечного множества H из $\mathbf{N}$ имеем $\| p_H \| \leqslant \| x \| < 1 \leqslant \| e \|$.

Следствие 1. *Если (x_n) — перемножаемая последовательность, произведение которой обратимо в A, то* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$.

Следствие 2. *Если (x_n) — перемножаемая последовательность, произведение которой обратимо в A, то всякая ее подпоследовательность $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$* (где (n_k) — строго возрастающая последовательность целых чисел) *перемножаема.*

Это сразу следует из критерия теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть A — полная нормированная алгебра; если (u_n) — абсолютно сходящийся ряд точек из A, то последовательность $(e + u_n)$ перемножаема в A; если, кроме того, все элементы $e + u_n$ обратимы в A, то обратимо и* $\prod\limits_{n\in\mathbf{N}} (e + u_n)$.

Применим критерий теоремы 1; для каждого конечного множества $L \subset \mathbf{N}$ имеем $p_L - e = \prod\limits_{n\in L} (e + u_n) - e = \sum\limits_{M} \left(\prod\limits_{n\in M} u_n\right)$, где M пробегает множество всех непустых подмножеств множества L (совершенно упорядоченное в смысле индуцированного порядка). Поскольку $\left\| \prod\limits_{n\in M} u_n \right\| \leqslant \prod\limits_{n\in M} \| u_n \|$, будем иметь

$$\| p_L - e \| \leqslant \sum_{M} \left(\prod_{n\in M} \| u_n \| \right) = \prod_{n\in L} (1 + \| u_n \|) - 1.$$

Но так как ряд с общим членом $\| u_n \|$, по предположению, сходится, то последовательность $(1 + \| u_n \|)$ перемножаема в $\mathbf{R}_+^*$ (гл. IV, § 7, теорема 4); поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечное множество $J_0 \subset \mathbf{N}$ такое, что $\left| \prod\limits_{n\in L} (1 + \| u_n \|) - 1 \right| \leqslant \varepsilon$ для всех не пересекающихся с ним множеств $L \subset \mathbf{N}$, и теорема доказана.

Следствие. *Если ряд с общим членом* u_n *абсолютно сходится и ни один из элементов* $e + u_n$ *не является в* A *делителем нуля, то и произведение* $\prod_{n\in\mathbf{N}}(e + u_n)$ *не является в* A *делителем нуля.*

В самом деле, имеется только конечное число значений n, для которых $\| u_n \| \geqslant 1$. Пусть $J = [0, m]$ — интервал в $\mathbf{N}$, содержащий все эти значения. Произведение последовательности $(e + u_n)$ равно произведению p_J на элемент $\prod_{n>m}(e + u_n)$, все сомножители которого обратимы (гл. IX, § 3, следствие предложения 12) и который, следовательно, сам обратим; будучи произведением конечного числа элементов, не являющихся делителями нуля, p_J тоже не является делителем нуля, а тогда то же верно для $\prod_{n\in\mathbf{N}}(e + u_n)$.

Достаточное условие перемножаемости, сформулированное в теореме 2, не является вообще необходимым (см. упражнение 6). Однако оно необходимо в том важном случае, когда A есть алгебра *конечного* ранга над $\mathbf{R}$ (в частности, когда A есть тело кватернионов $\mathbf{K}$ или алгебра матриц $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$):

Предложение 1. *Пусть* A *— нормированная алгебра конечного ранга над* $\mathbf{R}$. *Если* $(e + u_n)$ *— перемножаемая последовательность в* A, *произведение которой обратимо, то ряд с общим членом* u_n *абсолютно сходится.*

Как известно (гл. VII, § 3, предложение 2), существует число $c > 0$ такое, что

$$\sum_{i\in I} \| x_i \| \leqslant c \sup_{J\subset I} \Big\| \sum_{i\in J} x_i \Big\| \tag{1}$$

для всякого конечного семейства $(x_i)_{i\in I}$ точек из A.

Пусть $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ — произвольная последовательность элементов из A. Для каждого конечного множества I из $\mathbf{N}$ положим

$$p_I = \prod_{i\in I}(e + a_i), \quad s_I = \sum_{i\in I} a_i, \quad \sigma_I = \sum_{i\in I} \| a_i \|.$$

Лемма 1. *Пусть I — любое конечное множество из* **N** *и* $\varphi(I) = \sup_{J \subset I} \| p_J - e \|$. *Тогда*

$$\| p_J - e - s_J \| \leqslant \varphi(I)\, \sigma_J \tag{2}$$

для всех $J \subset I$.

Лемма очевидна, если J пусто; докажем ее индукцией по числу элементов множества J. Пусть $J = K \cup \{j\}$, где j строго больше каждого элемента из K; тогда $p_J = p_K (e + a_j)$ и $s_J = s_K + a_j$, откуда

$$p_J - e - s_J = (p_K - e - s_K) + (p_K - e)\, a_j$$

и, в силу предположения индукции и определения $\varphi(I)$,

$$\| p_j - e - s_J \| \leqslant \varphi(I)\, \sigma_K + \varphi(I) \| a_j \| = \varphi(I)\, \sigma_J,$$

чем лемма и доказана.

Лемма 2. *Если I — конечное множество из* **N** *такое, что* $\varphi(I) < \frac{1}{c}$, *то* $\sigma_I \leqslant \frac{c\varphi(I)}{1 - c\varphi(I)}$.

В самом деле, если $J \subset I$, то $\sigma_J \leqslant \sigma_I$, и потому, согласно (2), $\| s_J \| \leqslant \varphi(I)\, \sigma_I + \| p_J - e \| \leqslant (1 + \sigma_I)\, \varphi(I)$; так как в силу (1) $\sigma_I \leqslant c \sup_{J \subset I} \| s_J \|$, то заключаем, что $\sigma_I \leqslant c\varphi(I)(1 + \sigma_I)$, и лемма доказана.

Пусть теперь $(e + u_n)$ — перемножаемая последовательность в A, произведение которой обратимо; по теореме 1 существует конечное множество $J_0 \subset \mathbf{N}$ такое, что $\left\| \prod_{i \in H} (e + u_i) - e \right\| \leqslant$ $\leqslant 1/2c$ для всякого множества H из **N**, не пересекающегося с J_0. По лемме 2 отсюда вытекает, что $\sum_{i \in H} \| u_i \| \leqslant 1$ для всякого множества H из **N**, не пересекающегося с J_0, а это влечет суммируемость семейства $(\| u_n \|)$ в **R** (гл. IV, § 7, теорема 1).

3. *Бесконечные произведения*

Сопоставим каждой последовательности (x_n) точек нормированной алгебры A последовательность *частичных произведений* $p_n = \prod_{k=0}^{n} x_k$; *бесконечным произведением* с общим сомножителем x_n

называют *парой* последовательностей (x_n), (p_n). Бесконечное произведение с общим сомножителем x_n называется *сходящимся*, если последовательность (p_n) сходится в A; предел этой последовательности называется тогда *произведением* последовательности (x_n) и обозначается $\prod_{n=0}^{\infty} x_n$.

Предложение 2. *Пусть (x_n) — последовательность точек полной нормированной алгебры A.*

а) *Если бесконечное произведение с общим сомножителем x_n сходится и $\prod_{n=0}^{\infty} x_n$ обратимо, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует n_0 такое, что $\left\| \prod_{k=m}^{n} x_k - e \right\| \leqslant \varepsilon$, если $n_0 \leqslant m \leqslant n$.*

б) *Обратно, если последовательность (x_n) удовлетворяет этому условию, то бесконечное произведение с общим сомножителем x_n сходится; при этом, если каждое x_n обратимо, то обратимо и $\prod_{n=0}^{\infty} x_n$.*

Предоставляем читателю провести доказательство этого предложения, копирующее во всех пунктах доказательство теоремы 1 (лишь с заменой конечных множеств L из N, фигурирующих в этом последнем доказательстве, интервалами).

Следствие 1. *Если бесконечное произведение с общим сомножителем x_n сходится и $\prod_{n=0}^{\infty} x_n$ обратимо, то $\lim_{n\to\infty} x_n = e$.*

Следствие 2. *Если бесконечное произведение с общим сомножителем x_n сходится и $\prod_{n=0}^{\infty} x_n$ обратимо, то бесконечное произведение с общим сомножителем $y_n = x_{n+h}$ $(n \geqslant 0)$ сходится.*

Произведение последовательности (y_n) обозначается $\prod_{n=h}^{\infty} x_n$ и и называется еще *h-м остатком* бесконечного произведения с общим сомножителем x_n.

Предполагая по-прежнему обратимость $\prod_{n=0}^{\infty} x_n$, заключаем еще на основании предложения 2, что если (z_n) — последовательность, в которой $z_n = x_n$ для всех, кроме конечного числа, индексов, то произведение с общим сомножителем z_n сходится.

Предложение 3. *Пусть (k_n) — строго возрастающая последовательность целых чисел $\geqslant 0$, причем $k_0 = 0$; если бесконечное произведение с общим сомножителем x_n сходится, то и бесконечное произведение с общим сомножителем $u_n = \prod_{p=k_n}^{k_{n+1}-1} x_p$ сходится, причем $\prod_{n=0}^{\infty} u_n = \prod_{n=0}^{\infty} x_n$.*

В самом деле, последовательность частичных произведений для (u_n) является подпоследовательностью последовательности частичных произведений для (x_n).

Наконец, то же рассуждение, что и для коммутативных групп (гл. III, 2-е изд., § 4, n° 7; 3-е изд., § 5, n° 7), показывает, что если последовательность (x_n) *перемножаема* в нормированной алгебре A, то произведение с общим сомножителем x_n сходится, и $\prod_{n=0}^{\infty} x_n = \prod_{n\in\mathbf{N}} x_n$ (оно записывается также в виде $\prod_{n=0}^{\infty} x_n$); разумеется, обратное неверно (см. упражнение 7).

Упражнения

1) Пусть E — отделимое топологическое пространство, в котором определен мультипликативно записываемый ассоциативный закон. Обобщить определение 1 на случай семейства $(x_\iota)_{\iota\in J}$ элементов из E с *совершенно упорядоченным* множеством индексов I. Пусть p_J, для каждого конечного множества $J \subset I$, означает произведение $\prod_{\iota\in J} x_\iota$ последовательности $(x_\iota)_{\iota\in J}$.

Если E — *полная топологическая группа*, то для того, чтобы семейство $(x_\iota)_{\iota\in I}$ точек из E было перемножаемо, необходимо и достаточно, чтобы для каждой окрестности V нейтрального элемента e

группы E существовало конечное множество $J_0 \subset I$ такое, что $p_J (p_{J_0})^{-1} \in V$ (или $(p_{J_0})^{-1} p_J \in V$) для всякого конечного множества $J \subset I$, содержащего J_0.

*2) Непустое подмножество J совершенно упорядоченного множества I называется *обрубком*, если вместе со всякими двумя своими элементами α, β такими, что $\alpha < \beta$, оно содержит и весь отрезок $[\alpha, \beta]$.

а) Пусть $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — перемножаемое семейство в *полной группе* G. Показать, что для всякого обрубка J множества I семейство $(x_\iota)_{\iota \in J}$ перемножаемо. [Рассмотреть сначала частный случай, когда множество миноран обрубка J, не принадлежащих J, пусто.]

б) Разбиение $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ совершенно упорядоченного множества I называется *упорядоченным*, если L — совершенно упорядоченное множество и отношения $\lambda < \mu$, $\alpha \in J_\lambda$, $\beta \in J_\mu$ влекут $\alpha < \beta$; подмножества J_λ являются тогда обрубками множества I. Показать, что если $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — перемножаемое семейство в полной группе G, то семейство $(p_\lambda)_{\lambda \in L}$, где $p_\lambda = \prod_{\iota \in J_\lambda} x_\iota$, перемножаемо и имеет то же произведение, что и $(x_\iota)_{\iota \in I}$.

в) Обратно, если $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ — конечное упорядоченное разбиение множества I и $(x_\iota)_{\iota \in I}$ таково, что каждое из семейств $(x_\iota)_{\iota \in J_\lambda}$ перемножаемо, то семейство $(x_\iota)_{\iota \in I}$ перемножаемо.

*3) Пусть G — отделимая топологическая группа, обладающая окрестностью V_0 нейтрального элемента e, на которой $x \longmapsto x^{-1}$ равномерно непрерывно (как отображение G_d в G_d; см. гл. III, 2-е изд., § 3, упражнения 7 и 14; 3-е изд., § 3, упражнения 7 и 8). Пусть $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — перемножаемое семейство точек из G. Показать, что для всякой окрестности U элемента e существует конечное множество $J_0 \subset I$ такое, что для каждого конечного множества $K \subset I$, содержащегося в обрубке множества I, не пересекающемся с J_0, $p_k \in U$. [Показать сначала существование конечного множества $H_0 \subset I$ и конечного числа точек $a_1, a_2, \ldots, a_q$ из G таких, что для каждого конечного множества $L \subset I$, содержащегося в обрубке, не пересекающемся с H_0, $p_L \in a_k V_0' a_k^{-1}$ по крайней мере для одного индекса k, где V_0' — некоторая окрестность элемента e такая, что $V_0' V_0' \subset V_0$. Ограничиться затем рассмотрением конечных подмножеств, содержащихся в одном из открытых интервалов, концами которых служат два последовательных индекса из H_0; использовать рассуждение упражнения 2а) и равномерную непрерывность x^{-1} на каждой из окрестностей $a_k V_0 a_k^{-1}$.]

Вывести отсюда, что при тех же условиях $\lim x_\iota = e$ по фильтру дополнений конечных подмножеств множества I (если I бесконечно).

4) Пусть G — локально компактная группа. Показать, что множество конечных частичных произведений p_J перемножаемого семейства (x_ι) точек из G относительно компактно.

5) а) Пусть G — полная группа, всякая окрестность нейтрального элемента e которой содержит открытую подгруппу. Для того чтобы последовательность (x_n) точек из G была перемножаема, необходимо и достаточно, чтобы $\lim x_n = e$.

б) Пусть G — полная группа, всякая окрестность нейтрального элемента e которой содержит открытый *нормальный делитель* группы G. Для того чтобы семейство $(x_\iota)_{\iota \in I}$ точек из G было перемножаемо, необходимо и достаточно, чтобы $\lim x_\iota = e$ по фильтру дополнений конечных подмножеств множества I. [Использовать упражнение 3.]

6) Пусть A — алгебра (над $\mathbf{R}$) всех ограниченных числовых функций, определенных на интервале $E =]1, +\infty[\subset \mathbf{R}$, наделенных нормой $\| f \| = \sup_{x \in E} | f(x) |$, и u_n для каждого целого $n > 0$ означает функцию, равную $1/n$, когда $n \leqslant x \leqslant n + 1$, и 0 во всех других точках из E. Показать, что семейство $(1 + u_n)$ перемножаемо в A, но ряд с общим членом u_n не является абсолютно сходящимся в A.

7) Пусть (x_n) — последовательность точек нормированной алгебры A такая, что для всякой перестановки σ множества $\mathbf{N}$ бесконечное произведение с общим сомножителем $x_{\sigma(n)}$ сходится и $\prod_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ обратимо. Показать, что каждая последовательность $(x_{\sigma(n)})$ перемножаема. [То же рассуждение, что и в предложении 9 § 4 гл. III 2-го изд. (3-е изд., предложение 9 § 5).]

*8) Пусть A — полная нормированная алгебра; показать, что если (x_n) — последовательность точек из A такая, что для всякой перестановки σ множества $\mathbf{N}$ последовательность $(x_{\sigma(n)})$ перемножаема и имеет обратимое произведение, то каждое x_n обратимо. [Доказать сначала следующую алгебраическую лемму: если в кольце с единицей элементы x, y таковы, что xy обратимо, а yx не есть делитель нуля, то каждый из элементов x, y обратим; см. Алгебра, гл. I, § 8, упражнение 4.]

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

К ГЛАВЕ IX

(Римские цифры относятся к библиографии, помещенной в конце настоящего очерка.)

Как мы уже говорили (Исторический очерк к главе II), понятие метрического пространства было введено в 1906 г. М. Фреше и развито несколькими годами позже Ф. Хаусдорфом в его «Теории множеств». Оно приобретает особую важность после 1920 г., с одной стороны, благодаря фундаментальным работам С. Банаха и его школы по нормированным пространствам и их приложениям к функциональному анализу (см. книгу V), а с другой — в силу того интереса, который представляет понятие абсолютного значения для арифметики и алгебраической геометрии (где оказалось весьма плодотворным пополнение относительно абсолютного значения).

С периода 1920—1930 годов начинается целый ряд предпринятых московской школой исследований, посвященных свойствам топологии метрического пространства, направленных, в частности, на получение необходимых и достаточных условий для того чтобы заданная топология была метризуемой Именно это развитие идей привлекло интерес к понятию нормального пространства, которое было сформулировано Титце в 1923 г., но важная роль которого выявилась только благодаря ряду работ Урысона (VI) о продолжении непрерывных числовых функций. Не считая тривиального случая функции одной вещественной переменной, проблема продолжения на все пространство непрерывной числовой функции, определенной на замкнутом множестве, была впервые рассмотрена (для случая плоскости) А. Лебегом (III); до получения Урысоном окончательного результата она была решена для метрических пространств Титце (IV).

Распространение этой проблемы на случай функций со значениями в произвольном топологическом пространстве приобрело в последние годы большое значение в алгебраической топологии. Недавние работы выявили при этом, что понятие нормального пространства недостаточно приспособлено к этому кругу вопросов, ибо оставляет еще много возможностей для «патологии»; чаще всего его приходится заменять более узким понятием паракомпактного пространства, введенным в 1944 г. Дьедонне (IX); наиболее

замечательным результатом этой теории является теорема А. Стоуна (X), по которой всякое метризуемое пространство паракомпактно *).

Мы уже отмечали (Исторический очерк к главе IV) важные работы конца XIX и начала XX веков (Э. Борель, Бэр, Лебег, Осгуд, Юнг) по классификации точечных множеств в пространствах $\mathbf{R}^n$ и по классификации и характеризации числовых функций, получаемых исходя из непрерывных функций итерацией предельного перехода (для последовательностей функций). Вскоре было подмечено, что метрические пространства представляют естественную область для исследований подобного рода, развертываемых после 1910 г. главным образом русской и польской школами. Именно эти школы выяснили, наряду с другими вопросами, фундаментальную роль, которую играют в современном анализе понятие тощего множества и теорема о пересечении счетного семейства всюду плотных открытых множеств в полном метрическом пространстве (§ 5, теорема 1), ранее доказанная (независимо) Осгудом (I) для числовой прямой и Бэром (II) для пространств $\mathbf{R}^n$.

С другой стороны, в 1917 г. Суслин (V), исправляя одну ошибку Лебега, показал, что непрерывный образ борелевского множества не обязательно является борелевским, что привело его к определению и изучению более широкого класса множеств, называемых с тех пор «аналитическими» или «суслинскими»; после ранней смерти Суслина это изучение было продолжено главным образом Н. Лузиным (идеи которого вдохновляли Суслина) и польскими математиками (см. (VII) и (VIII)). Актуальное значение этих множеств заключается главным образом в их применениях к теории интегрирования (где благодаря своим специальным свойствам они допускают построения, которые были бы невозможны для произвольных измеримых множеств) и к современной теории потенциала, где фундаментальная теорема о емкостности суслинских множеств, совсем недавно доказанная Г. Шоке (XI), уже обнаружила свою плодотворность в различных приложениях.

---

*) Эта теорема позволила дать более удовлетворительное решение проблемы метризуемости, чем критерии, полученные русско-польской школой (см. «Критерий Нагата — Смирнова» в упражнении 22 § 4). Но следует отметить, что эти критерии до сих пор не получили применений; как это часто случалось в истории математики, решение проблемы метризации, по-видимому, имело меньше значения, чем те новые понятия, к развитию которых она привела.

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) W. Osgood, Non uniform convergence and the integration of series term by term, Amer. Journ. of Math. XIX (1897), стр. 155—190.

(II) R. Baire, Sur les fonctions de variables réelles, Ann. di Mat. (3), III (1899), стр. 1.

(III) H. Lebesgue, Sur le problème de Dirichlet, Rend. Circ. mat. di Palermo, XXIV (1907), стр. 371—402.

(IV) H. Tietze, Über Funktionen die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind, J. de Crelle, CXLV (1915), стр. 9—14.

(V) M. Souslin, Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis, C. R. Acad. Sci., CLXIV (1917), стр. 88—91.

(VI) P. Urysohn, Ueber die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, Math. Ann. XCIV (1925), стр. 262 [П. С. Урысон, Труды по топологии и другим областям математики, I, стр. 208.]

(VII) N. Lusin, Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications, Paris (Gauthier-Villars), 1930. [Н. Н. Лузин, Лекции об аналитических множествах и их приложениях, Москва, Гостехиздат, 1953.]

(VIII) K. Kuratowski, Topologie I, 2e éd., Warszawa-Vrocław, 1948. [Русский перевод: К. Куратовский, Топология, т. I, перевод с 5-го изд., Москва, Мир, 1966.]

(IX) J. Dieudonné, Une généralisation des espaces compacts, Journ. de Math. (9), XXIII (1944), стр. 65—76.

(X) A. H. Stone, Paracompactness and product spaces, Bull. Amer. Math. Soc., LIV (1948), стр. 977—982. [Русский перевод: Стоун А., Паракомпактность и произведения пространств, Математика, 5 : 5 (1966), стр. 3—11.]

(XI) G. Choquet, Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier V (1953—1954), стр. 131—295.

ГЛАВА X

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Это издание отличается от предыдущего главным образом своим новым планом, позволившим сгруппировать более четко основные результаты главы, устраняя второстепенные предложения; единственное существенное добавление касается свойств счетности пространств непрерывных функций (§ 3, n° 3).

Нанкаго, осень 1960 *Н. Б.*

§ 1. Равномерная структура $\mathfrak{S}$-сходимости

Обозначения. Пусть даны множества X, Y; напомним, что $\mathscr{F}(X; Y)$ означает множество всех отображений X в Y, отождествляемое с произведением Y^X (Теор. множ., гл. II, § 5, n° 2). Для каждого множества $H \subset \mathscr{F}(X; Y)$ и каждого $x \in X$ мы будем обозначать через $H(x)$ множество всех $u(x) \in Y$, где u пробегает H. Если Φ — базис фильтра в $\mathscr{F}(X; Y)$, мы будем обозначать через $\Phi(x)$ базис фильтра в Y, образованный множествами $H(x)$, где H пробегает Φ. Наконец, напомним, что для каждого $u \in \mathscr{F}(X; Y)$ и каждого множества $A \subset X$ через $u|A$ обозначается отображение A в Y, являющееся *сужением* u на A; $H|A$, где H — подмножество множества $\mathscr{F}(X; Y)$, означает множество всех сужений $u|A$ $(u \in H)$.

1. *Структура равномерной сходимости*

Пусть X — множество, Y — *равномерное пространство*. Для каждого окружения V из равномерной структуры пространства Y обозначим через $\boldsymbol{W}(V)$ множество тех пар (u, v) отображений X в Y, для которых $(u(x), v(x)) \in V$ при всех $x \in X$. Множества

$W(V)$, где V пробегает множество всех окружений для Y, образуют *фундаментальную систему окружений* некоторой равномерной структуры в $\mathscr{F}(X; Y)$. В самом деле, они очевидным образом удовлетворяют аксиоме (U_1') (гл. II, § 1, n° 1). Далее, если V, V' — окружения для Y такие, что $V \subset V'$, то $W(V) \subset W(V')$, так что множества $W(V)$ удовлетворяют аксиоме (B_1) (гл. I, 2-е изд., § 5, n° 4; 3-е изд., § 6, n° 3); а так как $\widehat{W^{-1}(V)} = W^{-1}(V)$, то выполнена аксиома (U_{II}). Наконец, отношения «$(u(x), v(x)) \in V$, каково бы ни было $x \in X$» и «$(v(x), w(x)) \in V$, каково бы ни было $x \in X$» влекут отношение «$(u(x), w(x)) \in \overset{2}{V}$, каково бы ни было $x \in X$»; иными словами, $\widehat{W^{2}(V)} \subset W^{2}(V)$, что доказывает (U'_{III}).

Определение 1. *Равномерная структура в $\mathscr{F}(X; Y)$, имеющая в качестве фундаментальной системы окружений множество всех $W(V)$, где V — окружения для Y, называется структурой равномерной сходимости; топология, порожденная этой равномерной структурой, называется топологией равномерной сходимости. Если фильтр Φ в $\mathscr{F}(X; Y)$ сходится к элементу u_0 в этой топологии, то говорят, что Φ равномерно сходится к u_0.*

Отметим, что *топология* равномерной сходимости в $\mathscr{F}(X; Y)$ зависит от равномерной структуры пространства Y, а не только от его топологии (упражнение 4).

Равномерное пространство, получаемое наделением $\mathscr{F}(X; Y)$ структурой равномерной сходимости, обозначается $\mathscr{F}_u(X; Y)$.

2. $\mathfrak{S}$-сходимость

Определение 2. *Пусть X — множество, Y — равномерное пространство и $\mathfrak{S}$ — некоторое множество подмножеств из X. Равномерной структурой равномерной сходимости на множествах из $\mathfrak{S}$, или просто равномерной структурой $\mathfrak{S}$-сходимости, называют слабейшую из равномерных структур в множестве $\mathscr{F}(X; Y)$, при которых его отображения-сужения $u \mapsto u \mid A$ в равномерные пространства $\mathscr{F}_u(A; Y)$ равномерно непрерывны для всех $A \in \mathfrak{S}$. Равномерное пространство, полученное наделением*

$\mathscr{F}(X; Y)$ *равномерной структурой* $\mathfrak{S}$*-сходимости, обозначается* $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$.

Топология, порожденная равномерной структурой $\mathfrak{S}$-сходимости, называется *топологией* $\mathfrak{S}$*-сходимости*; это слабейшая из топологий в множестве $\mathscr{F}(X; Y)$, при которых непрерывны его отображения $u \mapsto u|A$ в пространства $\mathscr{F}_u(A; Y)$ для всех $A \in \mathfrak{S}$ (гл. II, 2-е изд., § 1, предложение 1; 3-е изд., § 2, следствие предложения 4).

Для того чтобы фильтр Φ в $\mathscr{F}(X; Y)$ сходился к u_0 в топологии $\mathfrak{S}$-сходимости, необходимо и достаточно, чтобы $u|A$ для каждого $A \in \mathfrak{S}$ *равномерно сходилось к* $u_0|A$ по фильтру Φ (гл. I, 2-е изд., § 8, теорема 1; 3-е изд., § 7, предложение 10); говорят также, что Φ *равномерно сходится к* u_0 *на множествах из* $\mathfrak{S}$.

Точно так же, для того чтобы базис фильтра Φ в $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ был базисом фильтра Коши, необходимо и достаточно, чтобы образ Φ при отображении $u \mapsto u|A$ был базисом фильтра Коши в $\mathscr{F}_u(A; Y)$ для каждого $A \in \mathfrak{S}$ (гл. II, 3-е изд., § 3, предложение 4).

Пусть f — отображение топологического (соотв. равномерного) пространства Z в $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$. Для того чтобы f было непрерывно (соотв. равномерно непрерывно), необходимо и достаточно, чтобы отображение $z \mapsto f(z)|A$ пространства Z в $\mathscr{F}_u(A; Y)$ было непрерывно (соотв. равномерно непрерывно) для каждого $A \in \mathfrak{S}$ (гл. I, § 2, предложение 4 и гл. II, 3-е изд., § 2, предложение 4).

Пусть, наконец, M — множество в $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$; для того чтобы M было предкомпактно, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $A \in \mathfrak{S}$ множество сужений $u|A$ ($u \in M$) было предкомпактно в $\mathscr{F}_u(A; Y)$ (гл. II, 3-е изд., § 4, предложение 3).

Замечания. 1) Общее определение окружений инициальной равномерной структуры (гл. II, 3-е изд., § 2, предложение 4) показывает, что фундаментальную систему окружений для $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ можно получить следующим образом: пусть $W(A, V)$ для каждого $A \in \mathfrak{S}$ и каждого V из фундаментальной системы $\mathfrak{B}$ окружений для Y есть множество тех пар (u, v) отображений X в Y, для которых $(u(x), v(x)) \in V$ при всех $x \in A$; тогда *пересечения*

всевозможных *конечных семейств множеств* $W(A, V)$ образуют фундаментальную систему окружений для $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$.

Из этого описания сразу видно, что если $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ — множества подмножеств из X и $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}'$, то равномерная структура $\mathfrak{S}'$-сходимости *мажорирует* равномерную структуру $\mathfrak{S}$-сходимости.

2) Однако равномерная структура $\mathfrak{S}$-сходимости не изменяется при замене $\mathfrak{S}$ множеством $\mathfrak{S}'$ всех подмножеств из X, *содержащихся каждое в объединении конечного числа множеств из* $\mathfrak{S}$. Таким образом, при изучении $\mathfrak{S}$-сходимости можно всегда ограничиваться случаем, когда множество $\mathfrak{S}$ удовлетворяет следующим двум условиям:

(F'_I) *Всякое подмножество множества из* $\mathfrak{S}$ *принадлежит* $\mathfrak{S}$.

(F'_{II}) *Объединение всякого конечного семейства множеств из* $\mathfrak{S}$ *принадлежит* $\mathfrak{S}$.

Если (F'_{II}) выполнено, то фундаментальную систему окружений для $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ образуют множества $W(A, V)$, где A пробегает $\mathfrak{S}$, а V — какую-либо фундаментальную систему окружений для Y.

3) Равномерная структура $\mathfrak{S}$-сходимости есть прообраз равномерной структуры произведения $\prod_{A \in \mathfrak{S}} \mathscr{F}_u(A; Y)$ относительно отображения $u \mapsto (u \mid A)_{A \in \mathfrak{S}}$ множества $\mathscr{F}(X; Y)$ в $\prod_{A \in \mathfrak{S}} \mathscr{F}_u(A; Y)$ (гл. II, 3-е изд., § 2, предложение 8). Если $\mathfrak{S}$ *покрывает* X, то это отображение *инъективно*, и, следовательно, $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ изоморфно равномерному подпространству произведения $\prod_{A \in \mathfrak{S}} \mathscr{F}_u(A; Y)$ — образу $\mathscr{F}(X; Y)$ при этом отображении.

Предложение 1. *Если* Y *отделимо и* $\mathfrak{S}$ *покрывает* X, *то пространство* $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ *отделимо.*

В самом деле, пусть элементы u, v множества $\mathscr{F}(X; Y)$ таковы, что $(u, v) \in W(A, V)$ для каждого окружения V из Y и каждого $A \in \mathfrak{S}$; поскольку Y отделимо, отсюда вытекает прежде всего, что u и v совпадают на каждом множестве $A \in \mathfrak{S}$, а так как $\mathfrak{S}$ покрывает X, то $u = v$.

Замечания. 4) Пусть H — подмножество множества $\mathscr{F}(X; Y)$; допуская вольность речи, равномерной структурой (соотв. топологией) $\mathfrak{S}$-сходимости на H называют равномерную структуру (соотв. тополо-

гию), *индуцированную* в H равномерной структурой (соотв. топологией) $\mathfrak{S}$-сходимости из $\mathscr{F}(X; Y)$.

5) Пусть $\lambda \longmapsto u_\lambda$ есть отображение в $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ множества L, фильтрующегося по фильтру $\mathfrak{G}$, причем это отображение имеет предел по $\mathfrak{G}$; тогда говорят, что *по фильтру* $\mathfrak{G}$ *отображения* u_λ *множества* X *в* Y *равномерно сходятся к* v (или что *семейство* (u_λ) *равномерно сходится к* v) *на каждом множестве из* $\mathfrak{S}$; если $L = \mathbf{N}$ и $\mathfrak{G}$ — фильтр Фреше, то упоминание об этом фильтре опускают.

В частности, предположим, что в Y задан коммутативный и ассоциативный закон композиции в аддитивной записи. Пусть (u_n) — произвольная последовательность отображений X в Y и v_n — отображения $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ $(n \in \mathbf{N})$; говорят, что *ряд с общим членом* u_n *равномерно сходится на каждом множестве из* $\mathfrak{S}$, если последовательность (v_n) равномерно сходится на каждом множестве из $\mathfrak{S}$. Аналогично определяют *равномерно суммируемое* семейство $(u_\lambda)_{\lambda \in L}$ отображений X в Y, рассматривая отображения $x \longmapsto \sum_{\lambda \in J} u_\lambda(x)$ для всевозможных конечных множеств $J \subset L$ и их предел в $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ по фильтрующемуся упорядоченному множеству конечных подмножеств множества L (гл. III, 2-е изд., § 4, n° 1; 3-е изд., § 5, n° 1).

6) Из определений 1 и 2 непосредственно следует, что для всякого $x \in \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$ отображение $u \longmapsto u(x)$ пространства $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ в Y *равномерно непрерывно*. Отсюда, в частности, вытекает, что если обозначить через $\overline{H}$ замыкание множества $H \subset \mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ в $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$, то $\overline{H}(x) \subset \overline{H(x)}$ для всякого $x \in \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$ (гл. I, 2-е изд., § 4, теорема 1; 3-е изд., § 2, теорема 1).

3. *Примеры $\mathfrak{S}$-сходимости*

I. *Равномерная сходимость на подмножестве множества* X. Пусть $A \subset X$, $\mathfrak{S} = \{A\}$. Равномерная структура (соотв. топология) $\mathfrak{S}$-сходимости называется тогда также *равномерной структурой* (соотв. *топологией*) равномерной сходимости на A; если фильтр Φ в $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ сходится к u_0, то говорят, что он сходится к u_0 *равномерно на* A. При $A = X$ мы вновь приходим к структуре равномерной сходимости, определенной в n° 1.

II. *Простая сходимость на подмножестве множества* X. Пусть $A \subset X$; примем за $\mathfrak{S}$ множество всех одноточечных подмножеств множества A (или, что в силу замечания 2 из n° 2 равносильно этому,— множество всех конечных подмножеств множества A). Тогда равномерная структура (соотв. топология) $\mathfrak{S}$-сходимости называется *равномерной структурой* (соотв. *топологией*) *простой сходимости на* A; если фильтр Φ в $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ сходится к u_0, то говорят, что он *просто сходится к* u_0 *на* A; то же самое можно выразить, сказав, что $u_0(x)$ для каждого $x \in A$ есть предел $u(x)$ по фильтру Φ.

В частности, при $A = X$ равномерная структура (соотв. топология) простой сходимости на X называется также *равномерной структурой* (соотв. *топологией*) *простой сходимости*, а равномерное пространство, получаемое наделением $\mathscr{F}(X; Y)$ этой структурой, обозначается $\mathscr{F}_s(X; Y)$. Заметим, что топология простой сходимости есть не что иное, как топология *произведения* в Y^X; она зависит, таким образом, только от топологии пространства, а не от его равномерной структуры, в противоположность тому, что имеет место в общем случае.

III. *Компактная сходимость*. Предположим, что X — *топологическое пространство*, и примем за $\mathfrak{S}$ множество всех его *компактных* подмножеств. Равномерная структура (соотв. топология) $\mathfrak{S}$-сходимости называется тогда *равномерной структурой* (соотв. *топологией*) *компактной сходимости*; равномерное пространство, получаемое наделением $\mathscr{F}(X; Y)$ этой структурой, обозначается $\mathscr{F}_c(X; Y)$. Структура компактной сходимости мажорируется структурой равномерной сходимости, совпадая с ней, если X компактно; она мажорирует структуру простой сходимости, совпадая с ней, если X дискретно.

Если X — *равномерное пространство*, то аналогично, взяв в качестве $\mathfrak{S}$ множество всех его *предкомпактных* подмножеств, определим в $\mathscr{F}(X; Y)$ равномерную структуру *предкомпактной* сходимости. Точно так же, если X — *метрическое пространство*, можем принять за $\mathfrak{S}$ множество всех его *ограниченных* подмножеств; структуру $\mathfrak{S}$-сходимости называют тогда равномерной структурой *ограниченной сходимости*.

4. Свойства пространств $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$

Предложение 2. *Пусть X_1, X_2 — множества, Y — равномерное пространство, $\mathfrak{S}_i$ — некоторое множество подмножеств множества X_i ($i = 1, 2$) и $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$ — множество подмножеств вида $A_1 \times A_2$ произведения $X_1 \times X_2$, где $A_i \in \mathfrak{S}_i$, $i = 1, 2$. Тогда каноническая биекция $\mathscr{F}(X_1 \times X_2; Y) \to \mathscr{F}(X_1; \mathscr{F}(X_2; Y))$* (Теор. множ., Сводка результ., § 4, n° 14) *является изоморфизмом равномерного пространства $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2}(X_1 \times X_2; Y)$ на равномерное пространство $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}_1}(X_1; \mathscr{F}_{\mathfrak{S}_2}(X_2; Y))$.*

В самом деле, пусть V — окружение для Y и $A_i \in \mathfrak{S}_i$ ($i = 1, 2$); из определений непосредственно следует, что каноническая биекция отождествляет $W(A_1 \times A_2, V)$ с $W(A_1, W(A_2, V))$, и предложение доказано.

Предложение 3. а) *Пусть X — множество, $\mathfrak{S}$ — некоторое множество его подмножеств, Y и Y' — равномерные пространства и f — равномерно непрерывное отображение Y в Y'. Тогда отображение $u \mapsto f \circ u$ пространства $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ в $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y')$ равномерно непрерывно.*

б) *Пусть X и X' — множества, $\mathfrak{S}$* (соотв. $\mathfrak{S}'$) *— некоторое множество подмножеств множества X* (соотв. X'), *Y — равномерное пространство и отображение $g: X' \to X$ таково, что $g(A')$ для каждого $A' \in \mathfrak{S}'$ содержится в объединении конечного числа множеств из $\mathfrak{S}$. Тогда отображение $u \mapsto u \circ g$ пространства $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ в $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}'}(X'; Y)$ равномерно непрерывно.*

Предложение 4. *Пусть X и Y — множества, $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство множеств и $(Y_\mu)_{\mu \in M}$ — семейство равномерных пространств. Для каждого $\lambda \in L$ пусть $\mathfrak{S}_\lambda$ — некоторое множество подмножеств множества X_λ и g_λ — отображение X_λ в X; пусть $\mathfrak{S}$ — множество подмножеств множества X, образованное путем объединения всех $g_\lambda(\mathfrak{S}_\lambda)$. Наконец, пусть f_μ для каждого $\mu \in M$ — отображение Y в Y_μ, и Y наделено слабейшей из равномерных структур, при которых все f_μ равномерно непрерывны. Тогда равномерная структура $\mathfrak{S}$-сходимости в $\mathscr{F}(X; Y)$ является слабейшей из тех, при которых все его отображения $u \mapsto f_\mu \circ u \circ g_\lambda$ в $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}_\lambda}(X_\lambda; Y_\mu)$ равномерно непрерывны.*

Эти предложения непосредственно вытекают из описания фундаментальной системы окружений равномерной структуры $\mathfrak{S}$-сходимости, данного в замечании 1 n° 2; детали доказательств мы оставляем читателю. Предложение 4 влечет, в частности,

Следствие. *Пусть X — множество, $(Y_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство равномерных пространств и $\mathfrak{S}$ — некоторое множество подмножеств множества X. Если наделить $\prod_{\iota\in I} Y_\iota$ равномерной структурой произведения, то каноническая биекция равномерного пространства $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}\left(X; \prod_{\iota\in I} Y_\iota\right)$ на равномерное пространство $\prod_{\iota\in I} \mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y_\iota)$* (Теор. множ., Сводка результ., § 4, n° 13) *есть изоморфизм.*

5. *Полные множества в $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$*

Предложение 5. *Пусть X — множество, Y — равномерное пространство, $\mathfrak{S}$ — некоторое множество подмножеств множества X. Для того чтобы фильтр Φ в $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ сходился к u_0, необходимо и достаточно, чтобы Φ был фильтром Коши для равномерной структуры $\mathfrak{S}$-сходимости, просто сходящимся к u_0 на $B = \bigcup_{A\in\mathfrak{S}} A$.*

Поскольку структура простой сходимости на B мажорируется структурой $\mathfrak{S}$-сходимости, все сводится к доказательству того, что для каждого $A \in \mathfrak{S}$ и каждого *замкнутого* окружения V равномерной структуры пространства Y множество $W(A, V)$ *замкнуто* в топологии простой сходимости на B (гл. II, 2-е изд., § 3, упражнения 1а) и 1б); 3-е изд., § 3, предложение 7). Но $W(A, V)$ есть пересечение прообразов V относительно отображений $(u, v) \mapsto (u(x), v(x))$, где x пробегает A, а эти последние непрерывны в топологии простой сходимости (n° 2, замечание 6).

Следствие 1. *Для того чтобы подпространство H пространства $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ было полно, необходимо и достаточно, чтобы для каждого фильтра Коши Φ в H существовало $u_0 \in H$, к которому Φ просто сходится на $B = \bigcup_{A\in\mathfrak{S}} A$.*

Это непосредственно следует из предложения 5.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ — множества подмножеств множества X такие, что их объединения совпадают и $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2$; и пусть $H \subset \mathcal{F}(X; Y)$. Тогда полнота H по $\mathfrak{S}_1$-сходимости влечет его полноту по $\mathfrak{S}_2$-сходимости.*

В самом деле, всякий фильтр Коши по $\mathfrak{S}_2$-сходимости является фильтром Коши и по $\mathfrak{S}_1$-сходимости, и можно применить следствие 1.

Следствие 3. *Пусть H — подмножество множества $\mathcal{F}(X; Y)$ такое, что для всякого $x \in B = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$ замыкание множества $H(x)$ в Y есть полное подпространство. Тогда замыкание $\overline{H}$ множества H в $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ есть полное подпространство.*

Пусть Φ — фильтр Коши в $\overline{H}$; определим отображение v множества X в Y следующим образом. Если $x \in B$, то $\Phi(x)$ есть фильтр Коши в $\overline{H(x)}$ (n° 2, замечание 6) и, следовательно, в силу предположения имеет по крайней мере одну предельную точку; за $v(x)$ принимаем одну из них; если же $x \notin B$, то принимаем за $v(x)$ произвольную точку из Y. При таком определении ясно, что Φ просто сходится к v на B, так что v является пределом Φ в $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ по предложению 5.

В частности, если Y полно, то предположение следствия 3 предложения 5 выполняется для каждого $H \subset \mathcal{F}(X; Y)$, откуда

Теорема 1. *Пусть X — множество, $\mathfrak{S}$ — некоторое множество его подмножеств и Y — полное равномерное пространство; тогда равномерное пространство $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ полно.*

6. $\mathfrak{S}$-сходимость в пространствах непрерывных отображений

Пусть X и Y — топологические пространства; обозначим через $\mathcal{C}(X; Y)$ множество всех *непрерывных отображений* X *в* Y. Если $\mathfrak{S}$ — какое-либо множество подмножеств пространства X и Y — равномерное пространство, то через $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ будем обозначать множество $\mathcal{C}(X; Y)$, наделенное равномерной структурой $\mathfrak{S}$-схо-

димости. В частности, $\mathscr{C}_s(X; Y)$, $\mathscr{C}_c(X; Y)$, $\mathscr{C}_u(X; Y)$ означают множество $\mathscr{C}(X; Y)$, наделенное соответственно равномерной структурой простой сходимости, компактной сходимости и равномерной сходимости.

Предложение 6. *Пусть X — топологическое пространство, Y — равномерное пространство, $\mathfrak{S}$ — некоторое множество подмножеств из X. Для каждого $A \in \mathfrak{S}$ и каждого замкнутого окружения V для Y следы на $\mathscr{C}(X; Y) \times \mathscr{C}(X; Y)$ множеств $W(A, V)$ и $W(\overline{A}, V)$ совпадают.*

В самом деле, пусть u и v — непрерывные отображения X в Y; тогда $x \mapsto (u(x), v(x))$ есть непрерывное отображение X в $Y \times Y$, и потому предположение, что $(u(x), v(x)) \in V$ для всех $x \in A$ влечет, что $(u(x), v(x)) \in V$ для всех $x \in \overline{A}$ (гл. I, 2-е изд., § 4, теорема 2; 3-е изд., § 2, теорема 1).

Обозначая через $\overline{\mathfrak{S}}$ множество замыканий в X множеств из $\mathfrak{S}$, заключаем из предложения 6, что *в* $\mathscr{C}(X; Y)$ структуры $\mathfrak{S}$-сходимости и $\overline{\mathfrak{S}}$-сходимости совпадают.

Следствие. *Пусть B — плотное подмножество в X; в $\mathscr{C}(X; Y)$ структура равномерной сходимости совпадает со структурой равномерной сходимости на B.*

Предложение 7. *Пусть X — топологическое пространство, $\mathfrak{S}$ — некоторое множество его подмножеств и Y — равномерное пространство. Если Y отделимо и объединение B всех множеств из $\mathfrak{S}$ плотно в X, то $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ отделимо.*

В самом деле, если u и v принадлежат всем $W(A, V)$ ($A \in \mathfrak{S}$, V — окружение для Y), то предположение отделимости Y влечет, что $u(x) = v(x)$ для всех $x \in B$; если u и v непрерывны, то по принципу продолжения тождеств (гл. I, 2-е изд., § 8, следствие 1 предложения 6; 3-е изд., § 8, следствие 1 предложения 2) заключаем отсюда, что $u = v$.

В частности, в $\mathscr{C}(X; Y)$ топология простой сходимости на множестве, *плотном в* X, отделима.

Предложение 8. *Пусть X — множество, $\mathfrak{F}$ — фильтр в X и Y — равномерное пространство. Множество H всех отображе-*

ний u: $X \to Y$, *для которых* $u(\mathfrak{F})$ *есть базис фильтра Коши в* Y, *замкнуто в* $\mathcal{F}_u(X; Y)$.

В самом деле, пусть отображение u_0 множества X в Y есть точка прикосновения для H в $\mathcal{F}_u(X; Y)$. Для всякого симметричного окружения V равномерной структуры пространства Y существует такое отображение $u \in H$, что $(u_0(x), u(x)) \in V$, каково бы ни было $x \in X$; с другой стороны, по предположению, существует множество $M \in \mathfrak{F}$ такое, что $(u(x), u(x')) \in V$ для каждой пары элементов x, x' из M. Поскольку $(u_0(x), u(x)) \in V$ и $(u_0(x'), u(x')) \in V$, заключаем, что $(u_0(x), u_0(x')) \in \overset{3}{V}$ для каждой пары элементов x, x' из M, и предложение доказано.

Следствие 1. *Пусть* X — *топологическое пространство и* Y — *равномерное пространство. Множество всех отображений* X *в* Y, *непрерывных в некоторой точке* $x_0 \in X$, *замкнуто в* $\mathcal{F}_u(X; Y)$.

В самом деле, если $\mathfrak{B}$ — фильтр окрестностей точки x_0 в X, то $u(x_0)$ есть предельная точка для $u(\mathfrak{B})$; следовательно, для того чтобы u было непрерывно в x_0, необходимо и достаточно, чтобы $u(\mathfrak{B})$ являлось базисом фильтра Коши в Y (гл. II, 2-е изд., § 3, предложение 4; 3-е изд., § 3, следствие 2 предложения 5).

Следствие 2. *Пусть* X *и* L — *множества, фильтрующиеся соответственно по фильтрам* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{G}$, *а* Y — *полное равномерное пространство. Пусть далее* u_λ *для каждого* $\lambda \in L$ *есть отображение* X *в* Y. *Предположим, что*: 1° *семейство* $(u_\lambda)_{\lambda \in L}$ *сходится по фильтру* $\mathfrak{G}$ *равномерно на* X *к отображению* v *множества* X *в* Y; 2° u_λ *для каждого* $\lambda \in L$ *сходится по фильтру* $\mathfrak{F}$ *к пределу* y_λ. *При этих условиях* v *имеет предел по фильтру* $\mathfrak{F}$ *и всякий такой предел является пределом семейства* $(y_\lambda)_{\lambda \in L}$ *по* $\mathfrak{G}$.

В самом деле, v есть точка прикосновения множества отображений u_λ в $\mathcal{F}_u(X; Y)$, а значит, по предложению 8 $v(\mathfrak{F})$ есть базис фильтра Коши в Y, чем в силу полноты Y доказано, что v обладает некоторым пределом y по $\mathfrak{F}$. Пусть $X' = X \cup \{\omega\}$ — топологическое пространство, ассоциированное с фильтром $\mathfrak{F}$ (гл. I, 2-е изд., § 5, n° 8; 3-е изд., § 6, n° 5); продолжим u_λ (соотв. v) до отображения $\overline{u}_\lambda$ (соотв. $\overline{v}$) пространства X' в Y, полагая

$\overline{u}_\lambda(\omega) = y_\lambda$ (соотв. $\overline{v}(\omega) = y$). Тогда все $\overline{u}_\lambda$ и $\overline{v}$ будут непрерывны в X' и $\overline{u}_\lambda$ будет сходиться равномерно *на* X к $\overline{v}$ по $\mathfrak{G}$; поскольку X плотно в X', следствие предложения 6 показывает, что $\overline{u}_\lambda$ будет сходиться равномерно *на* X' к $\overline{v}$ и, в частности, что $y = \lim_{\mathfrak{G}} y_\lambda$.

Теорема 2. *Пусть X — топологическое пространство и Y — равномерное пространство. Тогда множество $\mathscr{C}(X; Y)$ всех непрерывных отображений X в Y замкнуто в $\mathscr{F}(X; Y)$, наделенном топологией равномерной сходимости.*

В самом деле, для каждого $x \in X$ множество всех отображений X в Y, непрерывных в точке x, замкнуто в $\mathscr{F}_u(X; Y)$ (следствие 1 предложения 8); поэтому и пересечение $\mathscr{C}(X; Y)$ этих множеств замкнуто.

Этот результат выражают еще, говоря, что *всякий равномерный предел непрерывных функций непрерывен.*

Следствие 1. *Если Y — полное равномерное пространство, то $\mathscr{C}_u(X; Y)$ полно.*

Действительно, по теореме 2 $\mathscr{C}_u(X; Y)$ есть замкнутое равномерное подпространство равномерного пространства $\mathscr{F}_u(X; Y)$, полного в силу теоремы 1.

Следствие 2. *Пусть X — топологическое пространство, $\mathfrak{S}$ — некоторое множество его подмножеств и Y — равномерное пространство; обозначим через $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ множество всех отображений X в Y, сужение которых на каждое множество из $\mathfrak{S}$ непрерывно. Тогда $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ замкнуто в равномерном пространстве $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ и является полным равномерным подпространством, если Y полно.*

Действительно, предположим, что u есть точка прикосновения для $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ в $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$; тогда (n° 2) $u|A$ при всяком $A \in \mathfrak{S}$ есть точка прикосновения для $\mathscr{C}(A; Y)$ в $\mathscr{F}_u(A; Y)$ и потому в силу теоремы 2 непрерывно.

Следствие 3. *Пусть X — метризуемое или локально компактное топологическое пространство и Y — равномерное про-*

странство. Тогда $\mathscr{C}(X; Y)$ *замкнуто в равномерном пространстве* $\mathscr{F}_c(X; Y)$; *если, кроме того,* Y *полно, то равномерное пространство* $\mathscr{C}_c(X; Y)$ *полно.*

В силу следствия 2 достаточно показать, что если $\mathfrak{S}$ — множество всех компактных подмножеств из X, то $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X; Y) = \mathscr{C}(X; Y)$ в обоих рассматриваемых случаях. Если X локально компактно, то это очевидно; если же X метризуемо, то предположение непрерывности сужения отображения u: $X \to Y$ на всякое компактное множество в X влечет, в частности, что для каждого $x \in X$ и каждой последовательности (z_n) точек из X, сходящейся к x, $u(x) = \lim\limits_{n\to\infty} u(z_n)$; следовательно, u непрерывно в x (гл. IX, § 2, предложение 10).

Отметим, что последнее рассуждение применимо в том более общем случае, когда всякая точка в X обладает *счетной* фундаментальной системой окрестностей.

Замечания. 1) Вообще говоря, множество $\mathscr{C}(X; Y)$ не замкнуто в $\mathscr{F}(X; Y)$, наделенном топологией *простой* сходимости; другими словами, простой предел непрерывных функций не обязательно непрерывен (упражнение 5а)).

2) Фильтр в $\mathscr{C}(X; Y)$ может *просто* сходиться к *непрерывной* функции, не сходясь к ней равномерно.

Например, пусть u_n — числовая функция на интервале $I = [0, 1]$, равная 0, если $x = 0$ или $\frac{2}{n} \leqslant x \leqslant 1$, равная 1 при $x = 1/n$ и линейная на каждом из интервалов $[0, 1/n]$ и $[1/n, 2/n]$; тогда последовательность (u_n) просто сходится к 0, но не сходится к 0 равномерно на I (см. упражнение 6).

3) Если X — равномерное пространство, то рассуждение, совершенно аналогичное проведенному при доказательстве предложения 8, показывает, что множество всех *равномерно непрерывных* отображений X в Y *замкнуто* в $\mathscr{F}_u(X; Y)$.

4) Предположим, что равномерное пространство Y наделено аддитивно записываемым ассоциативным и коммутативным законом композиции таким, что отображение $(y, y') \mapsto y + y'$ непрерывно на $Y \times Y$. Пусть (u_n) — такая последовательность непрерывных отображений X в Y, что ряд с общим членом u_n

равномерно сходится на X; тогда сумма этого ряда непрерывна на X.

Мы оставляем читателю формулировку соответствующего результата для *равномерно суммируемых* семейств (n° 1, замечание 5) непрерывных отображений.

Предложение 9. *Пусть X — топологическое пространство и Y — равномерное пространство. Тогда отображение $(f, x) \mapsto f(x)$ пространства $\mathscr{C}_u(X; Y) \times X$ в Y непрерывно.*

В самом деле, пусть f_0 — непрерывное отображение X в Y, x_0 — точка из X и V — симметричное окружение для Y. Множество T непрерывных отображений $f: X \to Y$ таких, что $(f(x), f_0(x)) \in V$ для всех $x \in X$, есть окрестность f_0 в $\mathscr{C}_u(X; Y)$. С другой стороны, так как f_0 непрерывно, то существует такая окрестность U точки x_0 в X, что $(f_0(x), f_0(x_0)) \in V$ для всех $x \in U$. Следовательно, $(f(x), f_0(x_0)) \in \overset{2}{V}$ для всех $(f, x) \in T \times U$, и предложение доказано.

Упражнения

1) Пусть X — множество, Y — непустое и не сводящееся к одной точке равномерное пространство, $\mathfrak{S}$ — непустое множество непустых подмножеств множества X и $Y' \subset \mathscr{F}(X; Y)$ — множество всех постоянных отображений X в Y. Обозначим через c_y для каждого $y \in Y$ постоянное отображение X в Y, равное y.

а) Показать, что $y \mapsto c_y$ есть изоморфизм пространства Y на равномерное подпространство Y' пространства $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$.

б) Для того чтобы $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ было отделимо, необходимо (и достаточно), чтобы Y было отделимо, а $\mathfrak{S}$ покрывало X.

в) Для того чтобы Y' было замкнуто в $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ было отделимо.

2) Пусть X — множество, Y — непустое и не сводящееся к одной точке отделимое равномерное пространство, а $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ — множества подмножеств множества X, удовлетворяющие условиям $(\mathrm{F}'_{\mathrm{I}})$ и $(\mathrm{F}'_{\mathrm{II}})$ n° 2; показать, что если $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2$ и $\mathfrak{S}_1 \neq \mathfrak{S}_2$, то равномерная структура $\mathfrak{S}_1$-сходимости слабее равномерной структуры $\mathfrak{S}_2$-сходимости. В частности:

1° Если X — отделимое но компактное топологическое пространство, то равномерная структура компактной сходимости слабее равномерной структуры равномерной сходимости.

2° Если X — отделимое топологическое пространство, в котором существуют бесконечные компактные множества (см. гл. I, 3-е изд.,

§ 9, упражнение 4), то равномерная структура простой сходимости слабее равномерной структуры компактной сходимости.

3) Пусть X — множество, $\mathfrak{S}$ — его покрытие, Y — неотделимое равномерное пространство и Y_0 — ассоциированное с Y отделимое равномерное пространство (гл. II, 2-е изд., § 1, n° 4; 3-е изд., § 3, n° 8). Показать, что отделимое равномерное пространство, ассоциированное с $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$, изоморфно $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y_0)$.

4) Показать, что в множестве $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ всех непрерывных конечных числовых функций, определенных на $\mathbf{R}$, топология равномерной сходимости получается различной, смотря по тому, наделим ли мы $\mathbf{R}$ аддитивной равномерной структурой или равномерной структурой, которую индуцирует (единственная) равномерная структура расширенной прямой $\overline{\mathbf{R}}$ (хотя топологии, определяемые в $\mathbf{R}$ этими двумя равномерными структурами, совпадают).

5) Пусть X — топологическое пространство; множество $\mathfrak{S}$ его подмножеств называют *насыщенным*, если $\mathfrak{S}$ удовлетворяет условиям $(\mathrm{F}'_{\mathrm{I}})$ и $(\mathrm{F}'_{\mathrm{II}})$ n° 2 и замыкание всякого множества из $\mathfrak{S}$ принадлежит $\mathfrak{S}$.

а) Показать, что если X — нормальное пространство (гл. IX, § 4) и $\mathfrak{S}$ — насыщенное множество его подмножеств, покрывающее X, то множество $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ плотно в пространстве $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X; \mathbf{R})$ (следствие 2 теоремы 2), наделенном топологией $\mathfrak{S}$-сходимости; в частности, $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ плотно в $\mathscr{F}_s(X; \mathbf{R})$; $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ замкнуто в $\mathscr{F}_s(X; \mathbf{R})$ только когда X дискретно.

б) Пусть X — вполне регулярное пространство (гл. IX, § 1, n° 5), а $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ — насыщенные множества его подмножеств; предположим, что $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2$ и $\mathfrak{S}_1 \neq \mathfrak{S}_2$. Показать, что в $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ топология $\mathfrak{S}_1$-сходимости слабее топологии $\mathfrak{S}_2$-сходимости.

6) а) Пусть X — топологическое пространство, Y — равномерное пространство и Φ — фильтр в множестве $\mathscr{C}(X; Y)$, просто сходящийся к некоторой функции u_0. Для того чтобы u_0 была непрерывна в точке $x_0 \in X$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого окружения V равномерной структуры пространства Y и каждого множества $M \in \Phi$ существовали окрестность U точки x_0 и $u \in M$ такие, что $(u_0(x), u(x)) \in V$ при всех $x \in U$.

б) Пусть X — квазикомпактное пространство, Y — равномерное пространство и Φ — фильтр в $\mathscr{C}(X; Y)$, просто сходящийся к некоторой функции u_0. Для того чтобы u_0 была непрерывна на X, необходимо и достаточно, чтобы для каждого окружения V для Y и каждого множества $M \in \Phi$ существовало конечное число функций $u_i \in M$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, для которых при любом $x \in X$ имелся хотя бы один индекс i такой, что $(u_0(x), u_i(x)) \in V$. [Использовать а).]

*7) Пусть X и Y — отделимые равномерные пространства. График $G(f) \subset X \times Y$ любого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ есть

замкнутое множество в $X \times Y$ (гл. I, 2-е изд., § 8, следствие 2 предложения 6; 3-е изд., § 8, следствие 2 предложения 2), так что $f \longmapsto G(f)$ есть инъективное отображение $\mathscr{C}(X; Y)$ в множество $\mathfrak{F}(X \times Y)$ всех непустых замкнутых подмножеств пространства $X \times Y$.

а) Показать, что отображение $f \longmapsto G(f)$ пространства $\mathscr{C}_u(X; Y)$ в $\mathfrak{F}(X \times Y)$ равномерно непрерывно, если наделить $\mathfrak{F}(X; Y)$ равномерной структурой, определенной в упражнение 7 § 2 гл. II 2-го изд. (3-е изд., § 1, упражнение 5).

б) Пусть Γ — образ множества $\mathscr{C}(X; Y)$ в $\mathfrak{F}(X \times Y)$ при отображении $f \longmapsto G(f)$ и φ — отображение Γ в $\mathscr{C}_u(X; Y)$, обратное к $f \longmapsto G(f)$. Показать, что если X компактно, то φ непрерывно на Γ. [Рассуждать от противного.]

в) Пусть X и Y совпадают с компактным интервалом $[0, 1]$ в $\mathbf{R}$. Показать, что φ не равномерно непрерывно на Γ.

*8) Пусть X и Y — метрические пространства и (f_n) — последовательность борелевских отображений класса α пространства X в Y (гл. IX, § 6, упражнение 16).

а) Предположим, что последовательность (f_n) просто сходится к некоторому отображению $f\colon X \to Y$. Показать, что f принадлежит классу $\alpha + 1$. [Заметить, что если U — открытое множество в Y, то $f^{-1}(U) = \bigcup_{n \geqslant 1} \left(\bigcap_{k \geqslant 0} f_{n+k}^{-1}(U) \right)$, и использовать упражнение 4 § 6 гл. IX.]

б) Предположим, что последовательность (f_n) равномерно сходится к f. Показать, что f принадлежит классу α. [Пусть F — замкнутое множество в Y и V_n для каждого $n > 0$ означает множество тех точек из Y, расстояние которых до F не превышает $1/n$. Показать, что существует возрастающая последовательность $n \longmapsto m(n)$ номеров такая, что $f^{-1}(F) = \bigcap_n f_{m(n)}^{-1}(V_n)$.]

в) Предположим, что Y — счетного типа. Показать, что если $f\colon X \to Y$ — борелевская функция класса $\alpha > 0$, то существует последовательность (g_n) борелевских функций $g_n\colon X \to Y$ класса $< \alpha$, просто сходящаяся к f. [Показать, что в качестве g_n можно взять функции, принимающие только конечное число значений; использовать упражнения 4а) и 16в) § 6 гл. IX.]

*9) Пусть X — бэровское пространство, Y — метрическое пространство и (f_n) — последовательность непрерывных отображений X в Y, просто сходящаяся к f. Точка $x \in X$ называется *точкой равномерной сходимости* последовательности (f_n), если для каждого $\varepsilon > 0$ существуют окрестность V точки x и целое p такие, что $d(f_m(y), f_n(y)) \leqslant \varepsilon$ для всех $m \geqslant p$, $n \geqslant p$ и $y \in V$ (где d — расстояние в Y). Показать, что дополнение S к множеству точек равномерной сходимо-

сти есть тощее множество в X. [См. упражнение 22а) § 5 гл. IX.] Привести пример, в котором S плотно в X. [Взять $X = Y = \mathbf{R}$; пусть $n \longmapsto r_n$ — биекция $\mathbf{N}$ на $\mathbf{Q}$; с другой стороны, пусть (g_n) — последовательность непрерывных отображений $\mathbf{R}$ в $[0, 1]$, сходящаяся к функции, равной 0 для $x \neq 0$, и равной 1 в точке 0, причем сходимость равномерна на всяком открытом интервале из $\mathbf{R}$, не содержащем 0. Рассмотреть последовательность функций

$$f_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p g_n(x - r_p),$$

где последовательность (α_p) надлежащим образом стремится к 0.]

10) Показать, что в группе Γ всех гомеоморфизмов числовой прямой $\mathbf{R}$ на себя топология простой сходимости совпадает с топологией компактной сходимости. [См. упражнение 14 § 3.]

11) Пусть X — топологическое пространство и G — топологическая группа; множество $\mathscr{C}(X; G)$ всех непрерывных отображений X в G есть подгруппа группы G^X. Пусть $\mathfrak{S}$ — некоторое множество подмножеств из X.

а) Предположим, что для каждого $A \in \mathfrak{S}$, каждой окрестности V нейтрального элемента e в G и каждого $u \in \mathscr{C}(X; G)$ существует окрестность W элемента e в G такая, что $sWs^{-1} \subset V$ для всех $s \in u(A)$. Показать, что тогда топология $\mathfrak{S}$-сходимости согласуется со структурой группы в $\mathscr{C}(X; G)$; кроме того, правая (соотв. левая) равномерная структура так определенной топологической группы $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X; G)$, где G наделена правой (соотв. левой) равномерной структурой, совпадает с равномерной структурой $\mathfrak{S}$-сходимости. Случай простой сходимости; случай компактной сходимости, когда G локально компактна. Случай, когда G коммутативна.

б) Показать, что если G — группа $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$, наделенная топологией, индуцированной из $\mathbf{R}^4$, то топология равномерной сходимости не согласуется со структурой группы в $\mathscr{C}(\mathbf{R}; G)$.

12) Пусть X — топологическое пространство и A — топологическое кольцо (гл. III, 2-е изд., § 5, п° 1; 3-е изд., § 6, п° 3); множество $\mathscr{C}(X; A)$ всех непрерывных отображений X в A является подкольцом кольца A^X. Пусть $\mathfrak{S}$ — некоторое множество подмножеств из X.

а) Предположим, что множества $u(M)$ для всех $M \in \mathfrak{S}$ и $u \in \mathscr{C}(X; A)$ ограничены (гл. III, 3-е изд., § 6, упражнение 12). Показать, что топология $\mathfrak{S}$-сходимости согласуется со структурой кольца в $\mathscr{C}(X; A)$. Случаи простой и компактной сходимости.

б) Пусть X — локально компактное, но не компактное пространство, счетное в бесконечности (гл. I, 2-е изд., § 10, п° 11; 3-е изд., § 9, п° 9). Показать, что топология равномерной сходимости не согласуется со структурой кольца в $C(X; \mathbf{R})$.

§ 2. Равностепенно непрерывные множества

1. Определение и общие признаки

Определение 1. *Пусть X — топологическое пространство и Y — равномерное пространство. Говорят, что множество $H \subset \mathscr{F}(X; Y)$ равностепенно непрерывно в точке $x_0 \in X$, если для каждого окружения V равномерной структуры пространства Y существует окрестность U точки x_0 в X такая, что $(f(x_0), f(x)) \in V$ для всех точек $x \in U$ и всех функций $f \in H$. Говорят, что H равностепенно непрерывно, если оно равностепенно непрерывно в каждой точке из X.*

Определение 2. *Пусть X и Y — равномерные пространства. Говорят, что множество $H \subset \mathscr{F}(X; Y)$ равномерно равностепенно непрерывно, если для каждого окружения V равномерной структуры пространства Y существует окружение U для X такое, что отношения $(x, x') \in U$ и $f \in H$ влекут $(f(x), f(x')) \in V$.*

Говорят, что семейство $(f_\iota)_{\iota \in I}$ отображений X в Y равностепенно непрерывно в точке x_0 (соотв. равностепенно непрерывно, равномерно равностепенно непрерывно), если множество всех f_ι равностепенно непрерывно в x_0 (соотв. равностепенно непрерывно, равномерно равностепенно непрерывно).

Ясно, что если $H \subset \mathscr{F}(X; Y)$ равностепенно непрерывно в x_0, то каждая функция $f \in H$ непрерывна в x_0; если H равностепенно непрерывно, то все $f \in H$ будут тем самым непрерывны на X, т. е. $H \subset \mathscr{C}(X; Y)$. Точно так же, если H равномерно равностепенно непрерывно (так что X — равномерное пространство), то каждая функция $f \in H$ равномерно непрерывна на X. Ясно, что если H равномерно равностепенно непрерывно, то оно равностепенно непрерывно; однако множество равномерно непрерывных отображений может быть равностепенно непрерывным, не будучи равномерно равностепенно непрерывным (см. упражнение 1, следствие 2 предложения 1 и предложение 4).

Примеры. 1) Пусть X — топологическое (соотв. равномерное) пространство и Y — равномерное пространство. Всякое *конечное* множество непрерывных (соотв. равномерно непрерывных) отображений X в Y равностепенно непрерывно (соотв. равномерно равностепенно непрерывно).

2) Пусть X и Y — метрические пространства, d (соотв. d') — расстояние в X (соотв. в Y), а k и α — числа >0. Множество всех отображений $f\colon X \to Y$ таких, что

$$d'(f(x), f(x')) \leqslant k\,(d(x, x'))^{\alpha}$$

для каждой пары (x, x') точек из X, равномерно равностепенно непрерывно. Например, множество всех *изометрий* (гл. IX, § 2, n° 2) пространства X на некоторую часть пространства Y равномерно равностепенно непрерывно.

° Пусть H — какое-либо множество *дифференцируемых* числовых функций на интервале $I \subset \mathbf{R}$ таких, что $|f'(x)| \leqslant k$ для всех $x \in I$ и всех $f \in H$. Тогда H *равномерно равностепенно непрерывно*, ибо по теореме о конечных приращениях (Функции действ. перем., гл. I, § 2, теорема 1) $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant k\,|x_1 - x_2|$ для всех x_1, x_2 из I и всех $f \in H$.°

3) Пусть G — топологическая группа, Y — равномерное пространство и f — равномерно непрерывное отображение группы G, наделенной своей левой равномерной структурой (гл. III, § 3, n° 1), в Y. Пусть f_s для каждого $s \in G$ означает отображение $x \mapsto f(sx)$ группы G в Y. Тогда множество отображений f_s ($s \in G$) равномерно равностепенно непрерывно, поскольку соотношение $x^{-1}x' \in V$ равносильно $(sx)^{-1}(sx') \in V$.

Предложение 1. *Пусть T — множество, $\mathfrak{S}$ — некоторое множество его подмножеств, Y — равномерное пространство, X — топологическое* (соотв. *равномерное*) *пространство и f — отображение $T \times X$ в Y. Пусть далее $H_A \subset \mathcal{F}(X; Y)$ для каждого $A \in \mathfrak{S}$ есть множество всех отображений вида $x \mapsto f(t, x)$, где $t \in A$. Для того чтобы отображение $x \mapsto f(\cdot, x)$ пространства X в $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(T; Y)$ было непрерывно в точке $x_0 \in X$* (соотв. *равномерно непрерывно*), *необходимо и достаточно, чтобы множество H_A для каждого $A \in \mathfrak{S}$ было равностепенно непрерывно в x_0* (соотв. *равномерно равностепенно непрерывно*).

Рассмотрим сначала тот частный случай, когда $\mathfrak{S} = \{T\}$, т. е. $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(T; Y) = \mathcal{F}_u(T; Y)$. Каково бы ни было окружение V для Y, условие $(f(\cdot, x), f(\cdot, x')) \in W(V)$ означает, что $(f(t, x), f(t, x')) \in V$ для всех $t \in T$. Поэтому непрерывность отображения $x \mapsto f(\cdot, x)$ в x_0 (соотв. равномерная непрерывность) означает, что каково бы ни было окружение V для Y, существует окрестность U точки x_0 в X (соотв. окружение M для X) такая, что отношение $x \in U$ (соотв. $(x, x') \in M$) влечет $(f(t, x), f(t, x_0)) \in V$ (соотв.

$(f(t, x), f(t, x')) \in V$) для всех $t \in T$; а тогда справедливость предложения вытекает из определений 1 и 2. В общем случае, согласно сказанному в n° 2 § 1, следует сказать, что отображение $x \mapsto f(\cdot, x) \mid A$ пространства X в $\mathscr{F}_u(A; Y)$ для каждого $A \in \mathfrak{S}$ непрерывно в точке x_0 (соотв. равномерно непрерывно); в силу предыдущего это равносильно условию, что H_A для каждого $A \in \mathfrak{S}$ равностепенно непрерывно в точке x_0 (соотв. равномерно равностепенно непрерывно).

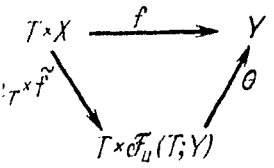
Предложение 1 позволяет дать подчас удобную перефразировку определений 1 и 2 применительно к случаю, когда $T = H$, а f — отображение $(h, x) \mapsto h(x)$ произведения $H \times X$ в Y; поскольку $f(\cdot, x)$ есть тогда отображение $h \mapsto h(x)$ множества H в Y, получаем

Следствие 1. *Пусть X — топологическое* (соотв. *равномерное*) *пространство, Y — равномерное пространство и $H \subset \mathscr{F}(X; Y)$. Для каждого $x \in X$ обозначим через $\tilde{x}$ отображение $h \mapsto h(x)$ множества H в Y. Для того чтобы H было равностепенно непрерывно в точке x_0* (соотв. *равномерно равностепенно непрерывно*), *необходимо и достаточно, чтобы отображение $x \mapsto \tilde{x}$ пространства X в равномерное пространство $\mathscr{F}_u(H; Y)$ было непрерывно в точке x_0* (соотв. *равномерно непрерывно*).

В частности, так как, когда X компактно, всякое непрерывное отображение X в $\mathscr{F}_u(H; Y)$ равномерно непрерывно (гл. II, § 4, теорема 2), имеем:

Следствие 2. *Пусть X — компактное пространство и Y — равномерное пространство. Всякое равностепенно непрерывное множество в $\mathscr{F}(X; Y)$ равномерно равностепенно непрерывно.*

Рассмотрим теперь множество T, топологическое пространство X, равномерное пространство Y и отображение $f\colon T \times X \to Y$. Обозначим через $\tilde{f}$ отображение $x \mapsto f(\cdot, x)$ пространства X в $\mathscr{F}_u(T; Y)$, и пусть $0\colon (t, g) \mapsto g(t)$ — каноническое отображение $T \times \mathscr{F}_u(T; Y)$ в Y; ясно, что диаграмма



(где ι_T — тождественное отображение) коммутативна. Предположим теперь, что T наделено топологией и отображение $f(\cdot, x)\colon t \mapsto f(t, x)$ для каждого $x \in X$ непрерывно; тогда в предыдущей диаграмме можно заменить $\mathscr{F}_u(T; Y)$ на $\mathscr{C}_u(T; Y)$. Но, как мы знаем, θ непрерывно (§ 1, предложение 9), и потому, если отображение $\tilde{f}$ непрерывно, то непрерывно и f. Поскольку непрерывность $\tilde{f}$ характеризуется предложением 1, получаем следующий результат:

Следствие 3. *Пусть T и X — топологические пространства, Y — равномерное пространство и f — отображение $T \times X$ в Y. Для непрерывности f достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1° *частичное отображение $t \mapsto f(t, x)$ непрерывно для каждого $x \in X$;*

2° *частичные отображения $x \mapsto f(t, x)$, где t пробегает T, образуют равностепенно непрерывное подмножество в $\mathscr{F}(X; Y)$.*

Возьмем, в частности, в качестве T множество $H \subset \mathscr{F}(X; Y)$, а в качестве f — каноническое отображение $(h, x) \mapsto h(x)$ произведения $H \times X$ в Y; условие 1° следствия 3 будет означать, что H наделено топологией, мажорирующей топологию простой сходимости, а условие 2° — что H равностепенно непрерывно. Таким образом:

Следствие 4. *Пусть X — топологическое пространство, Y — равномерное пространство и H — равностепенно непрерывное множество отображений X в Y. Если H наделено топологией простой сходимости, то отображение $(h, x) \mapsto h(x)$ произведения $H \times X$ в Y непрерывно.*

Говоря образно, это означает, что если $h \in H$ *просто* сходится к $h_0 \in H$, а $x \in X$ сходится к x_0, то $h(x)$ сходится к $h_0(x_0)$.

Следствие 5. *Пусть X — топологическое пространство, Y и Z — равномерные пространства и H — равностепенно непрерывное множество отображений Y в Z. Если H, $\mathscr{C}(X; Y)$ и $\mathscr{C}(X; Z)$ наделены топологией простой сходимости, то отображение $(u, v) \mapsto u \circ v$ произведения $H \times \mathscr{C}(X; Y)$ в $\mathscr{C}(X; Z)$ непрерывно.*

В самом деле, требуется доказать непрерывность отображения $(u, v) \mapsto u(v(x))$ произведения $H \times \mathscr{C}(X; Y)$ в Z для любого $x \in X$. Но $v \mapsto v(x)$ непрерывно на H (§ 1, n° 2, замечание 6), и из следствия 4 вытекает, что $(u, y) \mapsto u(y)$ есть непрерывное отображение $H \times Y$ в Z; поскольку $(u, v) \mapsto u(v(x))$ есть композиция отображений $(u, y) \mapsto u(y)$ и $(u, v) \mapsto (u, v(x))$, предложение доказано.

Следующее предложение и его следствие — аналоги следствий 3 и 4 предложения 1 для равномерно непрерывных отображений.

Предложение 2. *Пусть T, X, Y — равномерные пространства и f — отображение $T \times X$ в Y. Для того чтобы f было равномерно непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:*

1° *отображения $x \mapsto f(t, x)$, где t пробегает T, образуют равномерно равностепенно непрерывное множество в $\mathscr{F}(X; Y)$;*

2° *отображения $t \mapsto f(t, x)$, где x пробегает X, образуют равномерно равностепенно непрерывное множество в $\mathscr{F}(T; Y)$.*

Непосредственно ясно, что эти условия необходимы. Обратно, предположим, что они выполнены, и пусть W — окружение для Y; тогда существуют окружение U для T и окружение V для X такие, что: 1° $(t', t'') \in U$ влечет $(f(t', x), f(t'', x)) \in W$ для всех $x \in X$; 2° $(x', x'') \in V$ влечет $(f(t, x'), f(t, x'')) \in W$ для всех $t \in T$. Ясно, что тогда отношение «$(t', t'') \in U$ и $(x', x'') \in V$» влечет $(f(t', x'), f(t'', x'')) \in \overset{2}{W}$, и предложение доказано.

Пусть, в частности, T есть множество $H \subset \mathscr{F}(X; Y)$, наделенное равномерной структурой равномерной сходимости, а f — каноническое отображение $(h, x) \mapsto h(x)$; тогда условие 2° предложения 2 автоматически выполнено, ибо, каково бы ни было окружение W для Y, множество тех пар (h', h''), для которых $(h'(x), h''(x)) \in W$ при всех $x \in X$, является по определению окружением равномерной структуры в H. Достаточно поэтому выразить только условие 1°; таким образом имеем

Следствие. *Пусть X, Y — равномерные пространства и $H \subset \mathscr{F}(X; Y)$. Для того чтобы H было равномерно равностепенно*

непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы отображение $(h, x) \mapsto h(x)$ *произведения* $H \times X$ *в* Y *было равномерно непрерывно при наделении* H *равномерной структурой равномерной сходимости.*

2. Специальные признаки равностепенной непрерывности

Ясно, что всякое подмножество равностепенно непрерывного (соотв. равномерно равностепенно непрерывного) множества равностепенно непрерывно (соотв. равномерно равностепенно непрерывно). Кроме того, если X — топологическое (соотв. равномерное) пространство и Y — равномерное пространство, то объединение всякого *конечного* семейства равностепенно непрерывных (соотв. равномерно равностепенно непрерывных) множеств из $\mathcal{F}(X; Y)$ равностепенно непрерывно (соотв. равномерно равностепенно непрерывно).

Пусть X и X' — топологические (соотв. равномерные) пространства, Y и Y' — равномерные пространства, $f\colon X' \to X$ — непрерывное (соотв. равномерно непрерывное) отображение и $g\colon Y \to Y'$ — равномерно непрерывное отображение. Из определений непосредственно следует, что отображение $u \mapsto g \circ u \circ f$ множества $\mathcal{F}(X; Y)$ в $\mathcal{F}(X'; Y')$ переводит равностепенно непрерывные (соотв. равномерно равностепенно непрерывные) множества в равностепенно непрерывные (соотв. равномерно равностепенно непрерывные) множества.

Предложение 3. *Пусть* X *— топологическое* (соотв. *равномерное*) *пространство,* $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ *— семейство равномерных пространств,* Y *— множество и* f_ι *для каждого* ι *— отображение* Y *в* Y_ι. *Наделим* Y *слабейшей из равномерных структур, при которых все* f_ι *равномерно непрерывны. Для того чтобы множество* $H \subset \mathcal{F}(X; Y)$ *было равностепенно непрерывно* (соотв. *равномерно равностепенно непрерывно*), *необходимо и достаточно, чтобы его образ при отображении* $u \mapsto f_\iota \circ u$ *был равностепенно непрерывным* (соотв. *равномерно равностепенно непрерывным*) *множеством в* $\mathcal{F}(X; Y_\iota)$ *для каждого* $\iota \in I$.

Это непосредственно следует из определений 1 и 2 n° 1 и определения окружений для Y.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть X и Y — равномерные пространства, H — некоторое множество равномерно непрерывных отображений X в Y, $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ — отделимые пополнения пространств X и Y и $\tilde{H}$ — множество отображений $\hat{u}$: $\hat{X} \to \hat{Y}$ где u пробегает H* (гл. II, 3-е изд., § 3, предложение 15). *Для того чтобы H было равномерно равностепенно непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы таким было $\tilde{H}$.*

Напомним, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \hat{X} & \xrightarrow[\hat{u}]{} & \hat{Y} \end{array}, \tag{1}$$

где i и j — канонические отображения; кроме того, равномерная структура в X (соотв. Y) есть прообраз относительно отображения i (соотв. j) равномерной структуры в $\hat{X}$ (соотв. $\hat{Y}$). Таким образом, для того чтобы H было равномерно равностепенно непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладал его образ при отображении $u \mapsto j \circ u$ (предложение 3), причем можно даже ограничиться случаем, когда Y отделимо и полно; кроме того, если $\tilde{H}$ равномерно равностепенно непрерывно, то то же верно и для H — его образа при отображении $\hat{u} \to \hat{u} \circ i$; поэтому все сводится к установлению обратного в случае, когда $\hat{Y} = Y$. Итак, пусть V — замкнутое окружение для Y; по предположению, существует такое окружение U для X, что отношения $(x, x') \in U$ и $u \in H$ влекут $(u(x), u(x')) \in V$. Но если U' есть образ окружения U при отображении $i \times i$, то его замыкание $\overline{U}'$ в $\hat{X} \times \hat{X}$ является окружением в $\hat{X}$ (гл. II, 2-е изд., § 3, предложение 10; 3-е изд, § 3, предложение 12); из предположения следует, что для $(z, z') \in U'$ и $u \in H$ имеем $(\hat{u}(z), \hat{u}(z')) \in V$, а так как V замкнуто и $\hat{u}$ непрерывно, то тогда также $(\hat{u}(t), \hat{u}(t')) \in V$, каковы бы ни были $(t, t') \in \overline{U}'$ и $u \in H$, что завершает доказательство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть G и G' — топологические группы, наделенные своей левой равномерной структурой, и H — некоторое множество представлений G в G'. Следующие условия равносильны:*

а) *H равностепенно непрерывно в нейтральном элементе e группы G;*

б) *H равностепенно непрерывно;*

в) *H равномерно равностепенно непрерывно.*

Достаточно доказать, что а) влечет в). Пусть V' — окрестность нейтрального элемента e' группы G'; по предположению, существует окрестность V элемента e в G такая, что $u(V) \subset V'$ для всех $u \in H$; поскольку элементы множества H — представления, отношение $x^{-1}y \in V$ влечет $(u(x))^{-1}u(y) = u(x^{-1}y) \in V'$. Но в силу определения окружений левых равномерных структур в G и G' (гл. III, § 3, n° 1) это и означает, что H равномерно равностепенно непрерывно.

3. Замыкание равностепенно непрерывного множества

Предложение 6. *Пусть X — топологическое* (соотв. *равномерное*) *пространство, Y — равномерное пространство и $H \subset \mathscr{F}(X; Y)$. Для того чтобы H было равностепенно непрерывно в точке $x_0 \in X$* (соотв. *равномерно равностепенно непрерывно*), *необходимо и достаточно, чтобы его замыкание $\overline{H}$ в пространстве $\mathscr{F}_s(X; Y)$ было равностепенно непрерывно в точке x_0* (соотв. *равномерно равностепенно непрерывно*).

Условие тривиальным образом достаточно. Для доказательства необходимости рассмотрим окружение V для Y, *замкнутое* в $Y \times Y$; по предположению, существует окрестность U точки x_0 в X (соотв. окружение M для X) такая, что отношение $x \in U$ (соотв. $(x', x'') \in M$) влечет $(h(x_0), h(x)) \in V$ (соотв. $(h(x'), h(x'')) \in V$) для всех $h \in H$. Так как V замкнуто, то отображения $h \in \mathscr{F}(X; Y)$ такие, что $(h(x_0), h(x)) \in V$ для всех $x \in U$ (соотв. $(h(x'), h(x'')) \in V$ для всех пар $(x', x'') \in M$) образуют замкнутое множество в $\mathscr{F}_s(X; Y)$ (§ 1, n° 2, замечание 6); поскольку это замкнутое множество содержит H, оно содержит $\overline{H}$, чем предложение и доказано, поскольку окружения для Y, замкнутые в $Y \times Y$, образуют фундаментальную систему окружений (гл. II, 2-е изд., стр. 162 русского перевода; 3-е изд., § 1, следствие 2 предложения 2).

4. Простая сходимость и компактная сходимость в равностепенно непрерывных множествах

ТЕОРЕМА 1. *Пусть X — топологическое* (соотв. *равномерное*) *пространство, Y — равномерное пространство и H — равностепенно непрерывное* (соотв. *равномерно равностепенно непрерывное*) *множество в $\mathscr{C}(X; Y)$. Тогда в H равномерные структуры компактной* (соотв. *предкомпактной*) *сходимости, простой сходимости и простой сходимости на плотном подмножестве D пространства X совпадают.*

Достаточно показать, что последняя равномерная структура в H мажорирует первую; другими словами, требуется доказать, что для любых окружений V равномерной структуры пространства Y и компактного (соотв. предкомпактного) множества A в X существуют окружение W для Y и конечное множество $F \subset D$ такие, что отношение

$$u \in H, \quad v \in H \quad \text{и} \quad (u(x), v(x)) \in W \quad \text{для всех } x \in F \tag{2}$$

влечет

$$(u(x), v(x)) \in V \text{ для всех } x \in A. \tag{3}$$

Предположим сначала, что A компактно, а H равностепенно непрерывно. Пусть дано симметричное окружение W для Y; каждая точка $x \in X$ обладает такой окрестностью $U(x)$, что отношение $x' \in U(x)$ влечет $(u(x), u(x')) \in W$ для всех $u \in H$. Поэтому компактное множество A можно покрыть конечным числом открытых множеств U_i таких, что для каждой пары точек x', x'', принадлежащих одному и тому же множеству U_i, $(u(x'), u(x'')) \in \overset{2}{W}$ при всех $u \in H$. Для каждого i возьмем по точке a_i из $D \cap U_i$, и пусть F — множество, образованное этими точками; предположим тогда, что (2) выполнено; для каждого $x \in A$ существует индекс i такой, что a_i и x принадлежат одному и тому же множеству U_i, так что $(u(x), u(a_i)) \in \overset{2}{W}$ и $(v(a_i), v(x)) \in \overset{2}{W}$, а отсюда следует, что (2) влечет (3) коль скоро W выбрано так, что $\overset{5}{W} \subset V$.

Если A предкомпактно, а H равномерно равностепенно непрерывно, используем предложение 4: достаточно заметить, что $\overline{i(A)}$ компактно в $\hat{X}$, $i(D)$ плотно в $\hat{X}$ и все окружения для Y являются прообразами окружений для $\hat{Y}$ относительно $j \times j$.

Следствие. *В предположениях теоремы* 1 *замыкание* $\overline{H}$ *множества* H *в пространстве* $\mathscr{F}(X; Y)$, *наделенном топологией простой сходимости, совпадает с замыканием* H *в* $\mathscr{C}(X; Y)$, *наделенном топологией компактной* (соотв. *предкомпактной*) *сходимости.*

В самом деле, множество $\overline{H}$ равностепенно непрерывно (соотв. равномерно равностепенно непрерывно) в силу предложения 6 и потому содержится в $\mathscr{C}(X; Y)$; поэтому утверждение следствия непосредственно вытекает из того, что по теореме 1 обе рассматриваемые топологии в $\overline{H}$ совпадают.

5. Компактные множества непрерывных отображений

Теорема 2 (Асколи). *Пусть* X — *топологическое* (соотв. *равномерное*) *пространство,* $\mathfrak{S}$ — *его покрытие,* Y — *равномерное пространство и* H — *некоторое множество отображений* X *в* Y; *предположим, что для всякого* $A \in \mathfrak{S}$ *сужение на* A *каждого отображения* $u \in H$ *непрерывно* (соотв. *равномерно непрерывно*). *Для того чтобы* H *было предкомпактно в равномерной структуре* $\mathfrak{S}$*-сходимости, необходимо во всех случаях и достаточно, если все множества* $A \in \mathfrak{S}$ *компактны* (соотв. *предкомпактны*), *чтобы выполнялись следующие условия:*

а) *Для каждого* $A \in \mathfrak{S}$ *множество* $H \mid A \subset \mathscr{F}(A; Y)$ *сужений на* A *всех функций* $u \in H$ *равностепенно непрерывно* (соотв. *равномерно равностепенно непрерывно*).

б) *Для каждого* $x \in X$ *множество* $H(x) \subset Y$ *всех* $u(x)$, *где* u *пробегает* H, *предкомпактно.*

1° Покажем сначала *необходимость* условий а) и б). Как мы знаем (§ 1, n° 2, замечание 6), отображение $u \mapsto u(x)$ пространства $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ в Y равномерно непрерывно; если H предкомпактно, то предкомпактно и $H(x)$ (гл. II, 2-е изд., § 4, упражнение 8; 3-е изд., § 4, предложение 2); тем самым б) доказано. Для доказательства свойства а) рассмотрим множество $A \in \mathfrak{S}$, точку $x_0 \in A$ и окружение V для Y; поскольку H предкомпактно, оно может быть покрыто конечным числом множеств, малых порядка $W(A, V)$; другими словами, имеется конечная последовательность

(u_i) элементов из H такая, что, каково бы ни было $u \in H$, существует по крайней мере один индекс i, для которого

$$(u(x),\ u_i(x)) \in V \text{ для всех } x \in A. \tag{4}$$

Так как теперь каждое $u_i \mid A$ непрерывно в точке x_0 (соотв. равномерно непрерывно), то имеется окрестность U_i точки x_0 в A (соотв. окружение M_i для A), такая, что

$$x \in U_i \text{ влечет } (u_i(x),\ u_i(x_0)) \in V \tag{5}$$

(соотв., что

$$(x',\ x'') \in M_i \text{ влечет } (u_i(x'),\ u_i(x'')) \in V). \tag{6}$$

Пусть U (соотв. M) — пересечение всех U_i (соотв. всех M_i); оно снова есть окрестность точки x_0 в A (соотв. окружение для A). Для каждого $u \in H$ существует индекс i такой, что выполняется (4); записав условие (4) для x_0 и для x (соотв. для x' и x'') и принимая во внимание (5) (соотв. (6)), видим сразу, что отношение $x \in U$ (соотв. $(x',\ x'') \in M$) влечет $(u(x),\ u(x_0)) \in \overset{3}{V}$ (соотв. $(u(x'),\ u(x'')) \in \overset{3}{V}$) для всех $u \in H$, чем установлено свойство а).

2° Покажем теперь, что условия а) и б) *достаточны*, если все $A \in \mathfrak{S}$ компактны (соотв. предкомпактны). Действительно, выполнение условия б) влечет предкомпактность H в равномерной структуре *простой* сходимости (гл. II, 2-е изд., § 5, предложение 5; 3-е изд., § 4, предложение 3). Но из условия а) и теоремы 1 вытекает, что в $H \mid A$ равномерная структура простой сходимости на A совпадает со структурой равномерной сходимости на A; следовательно, $H \mid A$ предкомпактно в $\mathscr{F}_u(A; Y)$, а это влечет предкомпактность H в равномерной структуре $\mathfrak{S}$-сходимости (§ 1, п° 2).

Отметим, что условие б) теоремы 2 всегда выполнено, если Y — *предкомпактное* пространство.

Следствие 1. *Пусть X — топологическое* (соотв. *равномерное*) *пространство, Y — отделимое равномерное пространство и H — равностепенно непрерывное* (соотв. *равномерно равностепенно непрерывное*) *множество в $\mathscr{C}(X; Y)$. Предположим, что $H(x)$ относительно компактно в Y для каждого $x \in X$. Тогда H относительно компактно в $\mathscr{C}(X; Y)$, наделенном топологией компактной* (соотв. *предкомпактной*) *сходимости.*

Пусть $\overline{H}$ — замыкание H в $\mathscr{F}_s(X; Y)$; оно также является равностепенно непрерывным (соотв. равномерно равностепенно непрерывным) множеством (предложение 6). Так как, кроме того, $\overline{H}(x) \subset \overline{H(x)}$ (§ 1, n° 2, замечание 6), то $\overline{H}(x)$ относительно компактно; поэтому теорема 2 показывает, что $\overline{H}$ предкомпактно относительно $\mathfrak{S}$-сходимости, где $\mathfrak{S}$ — множество всех компактных (соотв. предкомпактных) подмножеств из X. Кроме того, поскольку $\overline{H(x)}$ компактно и, значит, полно, $\overline{H}$ полно в равномерной структуре простой сходимости (гл. II, 2-е изд., § 5, предложение 4; 3-е изд., § 3, предложения 10 и 8), а потому также — в равномерной структуре $\mathfrak{S}$-сходимости (§ 1, следствие 2 предложения 5). Поэтому, будучи предкомпактным, полным и отделимым, $\overline{H}$ компактно (§ 1, предложение 1).

Следствие 2. *Пусть X — топологическое* (соотв. *равномерное*) *пространство, Y — полное отделимое равномерное пространство и H — равностепенно непрерывное* (соотв. *равномерно равностепенно непрерывное*) *множество в $\mathscr{C}(X; Y)$. Предположим, что $H(x)$ относительно компактно в Y для каждой точки x из всюду плотного подмножества D пространства X. Тогда H относительно компактно в $\mathscr{C}(X; Y)$, наделенном топологией компактной* (соотв. *предкомпактной*) *сходимости.*

Все сводится к доказательству того, что $H(x)$ относительно компактно для *всех* $x \in X$, ибо тогда можно применить следствие 1. Поскольку Y полно, достаточно убедиться в том, что $H(x)$ предкомпактно для всех $x \in X$. Но каково бы ни было симметричное окружение V для Y, существует окрестность U точки x такая, что $(u(x), u(x')) \in V$ для всех $x' \in U$ и всех $u \in H$. В силу предположения существует $x' \in U \cap D$, а так как $H(x')$ относительно компактно в Y, то существует конечное число точек $y_k \in Y$ таких, что $H(x')$ содержится в объединении множеств $V(y_k)$; тогда $H(x)$ содержится в объединении множеств $\overset{2}{V}(y_k)$, чем доказательство и завершается.

Следствие 3. *Пусть X — локально компактное пространство, Y — отделимое равномерное пространство и $H \subset \mathscr{C}(X; Y)$. Для того чтобы H было относительно компактно в $\mathscr{C}_c(X; Y)$,*

необходимо и достаточно, чтобы H было равностепенно непрерывно, а $H(x)$ относительно компактно в Y для всех $x \in X$.

На основании следствия 1 достаточно показать, что если H относительно компактно в $\mathscr{C}_c(X; Y)$, то H равностепенно непрерывно; но всякая точка $x \in X$ обладает компактной окрестностью A, и из теоремы 2 вытекает, что $H \mid A$ равностепенно непрерывно; а это влечет равностепенную непрерывность H в точке x, что и требовалось.

Замечание. Пусть X — топологическое пространство, Y — равномерное пространство и $\mathfrak{S}$ — некоторое множество подмножеств из X. Тогда во всяком *предкомпактном* множестве $H \subset \mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ равномерная структура $\mathfrak{S}$-сходимости *совпадает* с равномерной структурой простой сходимости на $B = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$. Можно ограничиться случаем, когда $B = X$, а Y отделимо и полно; действительно, равномерная структура $\mathfrak{S}$-сходимости в $\mathscr{F}(X; Y)$ является прообразом равномерной структуры $\mathfrak{S}$-сходимости в $\mathscr{F}(B, \hat{Y})$ относительно отображения 0: $u \mapsto i \circ u \circ j$, где j — каноническая инъекция $B \to X$, а i — каноническое отображение $Y \to \hat{Y}$ (§ 1, предложение 4), и для предкомпактности H необходимо и достаточно, чтобы $\theta(H)$ было предкомпактно (гл. II, 2-е изд., § 5, предложение 5; 3-е изд., § 4, предложение 3). Но если $B = X$, а Y отделимо и полно, то $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ отделимо и полно (§ 1, предложение 1 и теорема 1), так что замыкание $\overline{H}$ множества H в этом пространстве *компактно*. В $\overline{H}$ топология простой сходимости отделима (§ 1, предложение 1) и мажорируется топологией $\mathfrak{S}$-сходимости; поэтому обе эти топологии совпадают (гл. I, 2-е изд., § 10, n° 4; 3-е изд., § 9, следствие 3 теоремы 2), и следовательно, совпадают равномерные структуры $\mathfrak{S}$-сходимости и простой сходимости (гл. II, § 4, теорема 1).

Упражнения

1) Пусть f — числовая функция, равная 0 для $x \leqslant 0$, равная x, если $0 \leqslant x \leqslant 1$, и равная 1 для $x \geqslant 1$. Показать, что последовательность числовых функций $f_n(x) = f(nx - n^2)$ $(n \in \mathbf{N})$ равностепенно непрерывна, но не равномерно равностепенно непрерывна в $\mathbf{R}$, хотя и состоит из равномерно непрерывных функций.

2) Пусть X — отделимое топологическое пространство, каждая точка которого обладает счетной фундаментальной системой окрестностей, и Y — равномерное пространство. Показать, что если множество $H \subset \mathscr{C}(X; Y)$ таково, что для каждого компактного $K \subset X$ множество $H \mid K$ сужений на K отображений $u \in H$ равностепенно непрерывно в $\mathscr{C}(K; Y)$, то H равностепенно непрерывно. [Рассуждать от противного.]

3) Пусть X, Y, Z — метрические пространства и $H \subset \mathscr{C}(X \times Y; Z)$. Предположим, что для каждого $x_0 \in X$ отображения $u(x_0, \cdot)$, где $u \in H$, образуют равностепенно непрерывное множество в $\mathscr{C}(Y; Z)$, а для каждого $y_0 \in Y$ отображения $u(\cdot, y_0)$, где $u \in H$, образуют равностепенно непрерывное множество в $\mathscr{C}(X; Z)$. Показать, что если X *полно*, то для каждого $b \in Y$ существует множество S_b в X с тощим дополнением в X такое, что множество H равностепенно непрерывно в точке (a, b) для каждого $a \in S_b$. [Применить упражнение 23 § 5 гл. IX, используя следствие 1 предложения 1 § 2 гл. X.]

4) Пусть X, Y, Z — равномерные пространства.

а) Пусть H — равномерно равностепенно непрерывное множество в $\mathscr{C}(Y; Z)$. Показать, что если H, $\mathscr{C}(X; Y)$ и $\mathscr{C}(X; Z)$ наделены равномерной структурой равномерной сходимости, то отображение $(u, v) \longmapsto u \circ v$ произведения $H \times \mathscr{C}(X; Y)$ в $\mathscr{C}(X; Z)$ равномерно непрерывно.

б) Пусть K — равномерно равностепенно непрерывное множество в $\mathscr{C}(X; Y)$ и L — равномерно равностепенно непрерывное множество в $\mathscr{C}(Y, Z)$. Показать, что множество всех $v \circ u$, где u пробегает K, а v пробегает L, равномерно равностепенно непрерывно в $\mathscr{C}(X; Z)$.

5) Пусть X — топологическое пространство, Y — нормированное пространство над недискретным нормированным телом K и H — множество из $\mathscr{F}(X; Y)$, равностепенно непрерывное в точке $x_0 \in X$. Показать, что для каждого вещественного числа $k \neq 0$ множество H_k всех таких линейных комбинаций $\sum_i c_i u_i$ функций $u_i \in H$, что $\sum_i |c_i| \leqslant k$, равностепенно непрерывно в точке x_0.

6) Пусть X — топологическое пространство, Y — равномерное пространство, H — равностепенно непрерывное множество в $\mathscr{C}(X; Y)$ и Φ — фильтр в H. Показать, что множество тех точек $x \in X$, для которых $\Phi(x)$ есть базис фильтра Коши в Y, замкнуто в X.

7) Пусть X — топологическое пространство, Y — полное отделимое равномерное пространство и φ — равномерно непрерывный гомеоморфизм пространства Y на открытое подмножество $\varphi(Y)$ отделимого равномерного пространства Y'. Пусть далее H — равностепенно непрерывное множество в $\mathscr{C}(X; Y)$ и H' — множество всех $\varphi \circ u$, где $u \in H$. Показать, что если v есть точка прикосновения для H' в $\mathscr{F}_s(X; Y')$, то $v^{-1}(\varphi(Y))$ открыто-замкнуто в X. В частности, если

X связно, то $v(X)$ содержится в $\varphi(Y)$ или в связной компоненте его дополнения $C\varphi(Y)$. [Заметить, что v непрерывно, и использовать упражнение 6.]

8) Пусть H — равностепенно непрерывное множество отображений топологического пространства X в $\mathbf{R}$.

а) Показать, что множество верхних (соотв. нижних) огибающих конечных подмножеств из H равностепенно непрерывно.

б) Пусть v — отображение X в $\overline{\mathbf{R}}$, являющееся точкой прикосновения для H в топологии простой сходимости. Показать, что v непрерывно на X и что множества $v^{-1}(+\infty)$ и $v^{-1}(-\infty)$ открыто-замкнуты в X. [Использовать упражнение 7.]

в) Вывести из а) и б), что верхняя огибающая w (соотв. нижняя огибающая v) множества H непрерывна в X и что множество $w^{-1}(+\infty)$ (соотв. $v^{-1}(-\infty)$) открыто-замкнуто в X.

г) Пусть X *связно* и существует такое $x_0 \in X$, что множество $H(x_0)$ ограниченно в $\mathbf{R}$. Показать, что для каждого компактного множества K из X множество сужений на K функций из H равномерно ограниченно на K. [Использовать в).]

9) Пусть X — множество, Y — равномерное пространство и $\mathfrak{S}$ — покрытие X. Для того чтобы подмножество H равномерного пространства $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ было предкомпактно, необходимо и достаточно, чтобы: 1° $H(x)$ было предкомпактно в Y для каждого $x \in X$; 2° в H равномерные структуры $\mathfrak{S}$-сходимости и простой сходимости совпадали. [Применить теорему 2, рассматривая X как дискретное пространство и ограничиваясь случаем, когда Y отделимо и полно.]

10) а) Пусть X — компактное пространство и (f_n) — последовательность непрерывных отображений X в себя, просто, но не равномерно сходящаяся на X к непрерывной функции (§ 1, п° 6, замечание 2). Показать, что множество функций f_n относительно компактно в $\mathscr{C}_s(X; X)$, но не в $\mathscr{C}_c(X; X) = \mathscr{C}_u(X; X)$.

б) Пусть I — интервал $[-1, +1]$ в $\mathbf{R}$ и $u_n(x) = \sqrt{x + 4n^2\pi^2}$ для каждого $n > 0$ и каждого $x \geqslant 0$. Показать, что множество H функций u_n равностепенно непрерывно в $\mathscr{C}(\mathbf{R}_+; I)$ и относительно компактно в $\mathscr{C}_c(\mathbf{R}_+; I)$, но не в $\mathscr{C}_u(\mathbf{R}_+; I)$. [Заметить, что последовательность (u_n) просто сходится к 0.]

11) Пусть X — вполне регулярное пространство и $\mathfrak{S}$ — множество подмножеств из X, внутренности которых покрывают X. Показать, что пространство $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X; \mathbf{R})$ не локально компактно.

12) Пусть X — топологическое пространство, Y — равномерное пространство, H — равностепенно непрерывное множество в $\mathscr{C}(X; Y)$ и V — симметричное окружение для Y. Показать, что для каждой точки $x \in X$ множество тех точек $x' \in X$, для которых существует

целое n (зависящее от x'), такое, что $H(x') \subset \overset{n}{V}(H(x))$, открыто-замкнуто. Вывести отсюда, что для каждого компактного и связного множества K в X и каждой точки $x_0 \in K$ существует такое целое $n > 0$, что $H(K) \subset \overset{n}{V}(H(x_0))$.

*13) Пусть X — топологическое пространство, Y — локально компактное равномерное пространство и H — равностепенно непрерывное множество в $\mathscr{C}(X; Y)$.

а) Пусть A — множество тех точек $x \in X$, для которых $H(x)$ относительно компактно в Y; показать, что A открыто в X. [См. 2-е изд., гл. I, § 10, предложение 10 и гл. II, § 4, предложение 1; 3-е изд., гл. I, § 9, предложение 10 и гл. II, § 4, предложение 4.]

б) Предположим, кроме того, что Y полно в своей равномерной структуре; тогда A также замкнуто в X. [Заметить, что если $x_0 \in \overline{A}$, то $H(x_0)$ относительно компактно в Y, рассматривая для этого ультрафильтр в $H(x_0)$ как образ некоторого ультрафильтра из H.] В этом случае, если X связно, то для того, чтобы H было относительно компактно в $\mathscr{C}_c(X; Y)$, необходимо и достаточно, чтобы множество $H(x_0)$ было относительно компактно в Y для *какой-нибудь* точки $x_0 \in X$.

в) Возьмем в качестве X компактный интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$, а в качестве Y — интервал $]0, 1[$, наделенный равномерной структурой, индуцируемой из $\mathbf{R}$. Привести пример равностепенно непрерывного множества H в $\mathscr{C}(X; Y)$, для которого бы множество A, определенное в а), было интервалом $]0, 1[$.

г) Пусть $X = Y$ и H состоит из гомеоморфизмов X на себя. Показать, что если H равностепенно непрерывно, то множество A, определенное в а), открыто-замкнуто в X.

14) Пусть Γ — равностепенно непрерывная группа гомеоморфизмов пространства $\mathbf{R}$ на себя; показать, что если некоторый возрастающий гомеоморфизм $u \in \Gamma$ имеет хотя бы одну неподвижную точку, то u — тождественное отображение. [Показать, что в противном случае моногенная группа, порожденная элементом u, не была бы равностепенно непрерывна в надлежаще выбранной неподвижной точке.] Если u убывает, то u^2 — тождественное отображение.

*15) Пусть X — метризуемое компактное пространство, Γ — группа всех его гомеоморфизмов на себя и G — подгруппа группы Γ, действующая *транзитивно* в X. Показать, что централизатор H группы G в Γ равностепенно непрерывен. [Рассуждать от противного, предполагая, что H не равностепенно непрерывен в некоторой точке $a \in X$; вывести отсюда существование последовательности точек $x_n \in X$ и последовательности элементов $u_n \in H$ таких, что $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} u_n(a) = b$, $\lim_{n\to\infty} u_n(x_n) = c$, где $b \neq c$. Заключить отсюда, что

последовательность (u_n) просто сходится на X, но ни одна точка из X не является точкой равномерной сходимости для этой последовательности, в противоречие с упражнением 9 § 1.]

16) Пусть X — отделимое равномерное пространство и Γ — равностепенно непрерывная группа гомеоморфизмов X на себя. Тогда отношение эквивалентности R, определяемое группой Γ в X, открыто (гл. I, 2-е изд., § 9, n° 6, 7; 3-е изд., § 5, n° 2).

а) Показать, что если всякая орбита относительно Γ замкнута в X, то пространство орбит X/Γ отделимо.

б) Показать, что если всякая орбита относительно Γ компактна, то отношение R замкнуто. [Использовать предложение 7 § 9 главы I 2-го изд. или предложение 10 § 5 главы I 3-го изд.]

в) Привести пример, когда X компактно, но ни одна орбита относительно Γ не замкнута в X. [См. гл. III, 3-е изд. § 2, упражнение 29.]

*17) Пусть X — компактное пространство и Γ — *счетная* группа гомеоморфизмов X на себя; предположим, что пространство орбит X/Γ *отделимо* (и потому *компактно*).

а) Показать, что орбита $\Gamma(x)$ каждой точки $x \in X$ есть *конечное* множество. [Заметить, что если бы это множество было бесконечно, оно не имело бы ни одной изолированной точки, и применить теорему Бэра (гл. IX, § 5, теорема 1).]

б) Пусть $\Delta(x_0)$ для каждой точки $x_0 \in X$ означает нормальный делитель группы Γ, образованный гомеоморфизмами, оставляющими неподвижными все точки орбиты $\Gamma(x_0)$. Показать, что если $\Delta(x_0)$ имеет конечное число образующих, то группа Γ *равностепенно непрерывна* в точке x_0. [Пусть f_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ — образующие нормального делителя $\Delta(x_0)$ и g_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ — представители каждого из классов группы Γ по модулю $\Delta(x_0)$, отличных от $\Delta(x_0)$; взять окрестность V точки x_0 так, чтобы ни одно из множеств $f_i(V)$, $f_i^{-1}(V)$ не пересекало ни одного из множеств $g_k(V)$; использовать затем замкнутость отношения эквивалентности, определяемого группой Γ (гл. I, § 10, предложение 8).]

в) Не предполагая ничего о $\Delta(x_0)$, допустим, что x_0 обладает фундаментальной системой *связных* окрестностей в X; показать, что Γ равностепенно непрерывна в точке x_0. [Метод, аналогичный указанному в б).] Вывести отсюда, что если X локально связно, то Γ равностепенно непрерывна.

г) Возьмем в качестве X компактное подпространство в $\mathbf{R}$, состоящее из точек 0, 1, $1/n$ и $1 + 1/n$, где n — целые $\geqslant 2$; привести пример неравностепенно непрерывной счетной группы Γ гомеоморфизмов X на себя, для которой X/Γ отделимо.

*18) Пусть G — отделимая топологическая группа, действующая непрерывно в отделимом топологическом пространстве X; говорят,

что G *совершенна в точке* $x_0 \in X$, если орбита Gx_0 *замкнута* в X и G действует совершенно в Gx_0 (гл. III, 3-е изд., § 4, n° 1).

а) Пусть G — локально компактная топологическая группа, действующая непрерывно в отделимом равномерном пространстве X. Предположим, что множество гомеоморфизмов $x \longmapsto sx$ пространства X на себя, где s пробегает G, *равностепенно непрерывно*. Показать, что если G совершенна в точке $x_0 \in X$, то существует окрестность V этой точки такая, что множество тех $s \in G$, для которых $sV \cap V \neq \varnothing$, относительно компактно в G. [См. гл. III, 3-е изд., § 4, *предложение* 7.] Вывести отсюда, что множество D точек из X, где G совершенна, открыто в X, и G действует совершенно в D. Если X, кроме того, локально компактно, то D открыто-замкнуто в X. [Использовать следствие 2 предложения 1.]

б) Пусть E — множество на числовой плоскости $\mathbf{R}^2$, состоящее из начала (0, 0) и точек $(0, 2^{-n})$, где n — целые $\geqslant 0$. Для каждого целого $n \in \mathbf{Z}$, отличного от 0, обозначим через u_n сужение на E такого аффинного линейного отображения плоскости $\mathbf{R}^2$ в себя, что $u_n(0, 0) = (n, 0)$ и $u_n(0, 2^{-|n|}) = (0, \theta^n)$, где θ — иррациональное число такое, что $0 < \theta < 1$; пусть X — локально компактное подпространство в $\mathbf{R}^2$, являющееся объединением E и всех $u_n(E)$ $(n \in \mathbf{Z},\ n \neq 0)$. Обозначим, кроме того, через u_0 тождественное отображение E на себя и определим u_n $(n \in \mathbf{Z})$ на всем X, полагая $u_n(u_m(x)) = u_{n+m}(x)$ для всех $x \in E$ и всех $m \in \mathbf{Z}$; множество G отображений u_n является группой гомеоморфизмов X на себя, которую мы наделим дискретной топологией, так что G будет действовать непрерывно в X. Показать, что G совершенна в каждой точке из X, но не равностепенно непрерывна и не действует совершенно в X.

в) Пусть X — подпространство (не локально компактное) в $\mathbf{R}^2$ (отождествленном с $\mathbf{C}$), состоящее из полуплоскости $y > 0$ и начала. Определим гомеоморфизм u пространства X на себя, положив $u(0, 0) = (0, 0)$ и $u(re^{i\omega}) = re^{i\omega'}$, где $\omega' = \omega/2$, если $0 < \omega \leqslant \pi/2$, $\omega' = \omega - \pi/4$, если $\pi/2 \leqslant \omega \leqslant 3\pi/4$, и $\omega' = 2\omega - \pi$, если $3\pi/4 \leqslant \omega < \pi$ $(r > 0,\ 0 < \omega < \pi)$. Пусть G — моногенная группа гомеоморфизмов X на себя, порожденная u и наделенная дискретной топологией. Показать, что G равностепенно непрерывна на X и что множеством тех точек из X, где G совершенна, служит полуплоскость $y > 0$.

19) Пусть X — отделимое равномерное пространство и G — группа гомеоморфизмов X на себя.

а) Показать, что если G равностепенно непрерывна и дискретна в топологии простой сходимости, то она замкнута в пространстве $\mathscr{F}_s(X; X)$.

б) Показать, что если G, наделенная дискретной топологией, совершенна хотя бы в одной точке из X (упражнение 18), то она замкнута в $\mathscr{F}_s(X; X)$ и топология простой сходимости индуцирует в G дискретную топологию.

в) Пусть X — топологическая сумма пространств X_1, X_2, гомеоморфных $\mathbf{R}$, так что X отождествима с произведением $\mathbf{R} \times \{1, 2\}$; наделим X равномерной структурой произведения. Для каждой пары (m, n) целых рациональных чисел обозначим через u_{mn} гомеоморфизм X на себя, определенный для всех $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$ уравнениями $u_{mn}(x_1) = x_1 + m\alpha + n\beta$, $u_{mn}(x_2) = x_2 + m\gamma + n\delta$, где α, β, γ, δ — вещественные числа $\neq 0$ такие, что α/β и γ/δ иррациональны и различны. Показать, что отображения u_{mn} образуют группу G гомеоморфизмов X на себя, которая равностепенно непрерывна и дискретна в топологии простой сходимости, но что G (наделенная дискретной топологией) не является совершенной ни в одной точке из X.

20) Пусть G — группа гомеоморфизмов отделимого равномерного пространства X на себя. Предположим, что G равностепенно непрерывна и, будучи наделенной дискретной топологией, действует совершенно в X. Предположим, кроме того, что множество всех $x \in X$, не являющихся неподвижными ни для одного не тождественного гомеоморфизма $u \in G$, всюду плотно в X. Показать, что при этих условиях в X существует открытое множество F, такое, что $F \cap u(F) = \varnothing$ для каждого не тождественного гомеоморфизма $u \in G$ и что канонический образ множества F в пространстве орбит E/G открыт в E/G, всюду плотен и гомеоморфен F. [Использовать упражнение 16 и теорему Цорна.]

§ 3. Специальные функциональные пространства

1. *Пространства отображений в метрическое пространство*

Пусть X — множество, Y — равномерное пространство, $(f_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство *отклонений*, определяющее равномерную структуру пространства Y (гл. IX, § 1, n° 4), и $\mathfrak{S}$ — некоторое множество подмножеств из X. Для каждого $\iota \in I$, каждого множества $A \in \mathfrak{S}$ и каждой пары (u, v) отображений X в Y положим

$$g_{\iota, A}(u, v) = \sup_{x \in A} f_\iota(u(x), v(x));$$

ясно, что $g_{\iota, A}$ — *отклонение* на $\mathscr{F}(X; Y)$ и что семейство отклонений $(g_{\iota, A})$, где ι пробегает I, а A пробегает $\mathfrak{S}$, определяют равномерную структуру $\mathfrak{S}$-*сходимости* в $\mathscr{F}(X; Y)$. В частности:

Предложение 1. *Если Y — метризуемое равномерное пространство, то равномерная структура равномерной сходимости в $\mathscr{F}(X; Y)$ метризуема.*

В самом деле, пусть d — расстояние в Y, согласующееся с равномерной структурой этого пространства; тогда структура равномерной сходимости в $\mathcal{F}(X; Y)$ определяется одним отклонением

$$\delta(u, v) = \sup_{x \in X} d(u(x), v(x));$$

в общем случае это отклонение не конечно; но оно эквивалентно некоторому конечному отклонению (гл. IX, § 1, n° 2), и так как равномерная структура равномерной сходимости отделима (§ 1, предложение 1), то она метризуема.

Следствие. *Пусть X — топологическое пространство и Y — метризуемое равномерное пространство; предположим, что существует такая последовательность (K_n) компактных множеств в X, что всякое компактное множество из X содержится в одном из K_n. Тогда равномерная структура компактной сходимости в $\mathcal{F}(X; Y)$ метризуема.*

В самом деле, так как K_n образуют покрытие X, то $\mathcal{F}_c(X; Y)$ изоморфно равномерному подпространству произведения $\prod_n \mathcal{F}_u(K_n; Y)$ (§ 1, n° 2, замечание 3), и потому утверждение следствия вытекает из предложения 1 (гл. IX, § 2, следствие 2 теоремы 1).

Заметим, что это следствие применимо, в частности, когда X — *локально компактное пространство, счетное в бесконечности* (гл. 1, 2-е изд., стр. 124 русского перевода; 3-е изд., § 9, следствие 1 предложения 15).

Пусть теперь Y — *метрическое* пространство и d — его расстояние. Для каждого множества X и множества $\mathfrak{S}$ его подмножеств будем обозначать через $\mathcal{B}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ множество всех отображений $u: X \to Y$ таких, что $u(A)$ *ограничено* для каждого $A \in \mathfrak{S}$; если не оговорено противное, будем наделять $\mathcal{B}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ равномерной структурой $\mathfrak{S}$-сходимости; последняя определяется семейством отклонений

$$d_A(u, v) = \sup_{x \in A} d(u(x), v(x)) \qquad (A \in \mathfrak{S})$$

на $\mathcal{B}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$, по предположению, конечных. При $\mathfrak{S} = \{X\}$ вместо $\mathcal{B}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ будем писать $\mathcal{B}(X; Y)$; отображение $u: X \to Y$

называется *ограниченным*, если оно принадлежит $\mathscr{B}(X; Y)$, т. е. если $u(X)$ есть ограниченное множество в Y.

Предложение 2. *Пусть X — множество и Y — метрическое пространство. Множество $\mathscr{B}(X; Y)$ всех ограниченных отображений открыто-замкнуто в пространстве $\mathscr{F}_u(X; Y)$.*

Действительно, если u ограниченно, то и всякое отображение $v\colon X \to Y$ такое, что $d(u(x), v(x)) \leqslant 1$ для каждого $x \in X$, ограниченно, ибо

$$d(v(x), v(x_0)) \leqslant d(u(x), u(x_0)) + 2;$$

следовательно, $\mathscr{B}(X; Y)$ открыто. С другой стороны, если u — точка прикосновения для $\mathscr{B}(X; Y)$ в $\mathscr{F}_u(X; Y)$, то существует отображение $u_0 \in \mathscr{B}(X; Y)$ такое, что $d(u(x), u_0(x)) \leqslant 1$ для всех $x \in X$, и, следовательно, u ограниченно.

Следствие 1. *Пусть X — множество, Y — метрическое пространство и $\mathfrak{S}$ — некоторое множество подмножеств из X. Тогда множество $\mathscr{B}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ всех отображений X в Y, переводящих каждое $A \in \mathfrak{S}$ в ограниченное множество в Y, замкнуто в $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$. В частности, если Y полно, то $\mathscr{B}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ полно в равномерной структуре $\mathfrak{S}$-сходимости.*

Действительно, $\mathscr{B}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ есть прообраз подмножества $\prod_{A \in \mathfrak{S}} \mathscr{B}(A; Y)$ произведения $\prod_{A \in \mathfrak{S}} \mathscr{F}_u(A; Y)$ относительно канонического отображения пространства $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ в $\prod_{A \in \mathfrak{S}} \mathscr{F}_u(X; Y)$; поэтому первое утверждение вытекает из замечания 3 n° 2 § 1. Второе вытекает из теоремы 1 § 1.

Следствие 2. *Пусть X — топологическое пространство и Y — метрическое пространство. Тогда пространство всех ограниченных непрерывных отображений X в Y открыто-замкнуто в пространстве $\mathscr{C}_u(X; Y)$; оно полно, если Y, кроме того, полно.*

В самом деле, рассматриваемое пространство является пересечением

$$\mathscr{B}(X; Y) \cap \mathscr{C}_u(X; Y);$$

первое утверждение следует из предложения 2, а второе вытекает из следствия 1 теоремы 2 § 1.

2. Пространства отображений в нормированное пространство

Рассмотрим, в частности, случай, когда Y есть *нормированное* векторное пространство над недискретным нормированным телом K (гл. IX, § 3, n° 3), с нормой $\| y \|$ элемента $y \in Y$; тогда множество $\mathcal{F}(X; Y) = Y^X$ канонически наделяется структурой векторного пространства над K. Для того чтобы отображение $u: X \to Y$ было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы числовая функция $x \mapsto \| u(x) \|$ была ограниченной на X; ясно, что если u, v — ограниченные отображения X в Y, то $u + v$ и λu ($\lambda \in K$) также ограниченны; иначе говоря, $\mathscr{B}(X; Y)$ есть *векторное подпространство* пространства $\mathcal{F}(X; Y)$. Кроме того, $\| u \| = \sup_{x \in X} \| u(x) \|$ есть *норма* на $\mathscr{B}(X; Y)$, ибо эта функция удовлетворяет неравенству треугольника, $\| u \| = 0$ влечет $u = 0$ и, наконец, для всех $\lambda \in K$ имеем $\| \lambda u \| = \sup_{x \in X} \| \lambda u(x) \| = \sup_{x \in X} | \lambda | \| u(x) \| = | \lambda | \sup_{x \in X} \| u(x) \| = | \lambda | \| u \|$. Непосредственно ясно также, что равномерная структура в $\mathscr{B}(X; Y)$, определяемая этой нормой, есть структура равномерной сходимости. Если не оговорено противное, то рассматривая $\mathscr{B}(X; Y)$ как нормированное пространство, мы всегда будем иметь в виду эту норму.

Предложение 3. *Если нормированное пространство Y полно, то всякий ряд (u_n) ограниченных отображений X в Y, абсолютно сходящийся в нормированном пространстве $\mathscr{B}(X; Y)$* (т. е. такой, что $\sum_{n=0}^{\infty} \| u_n \| < +\infty$; см. гл. IX, § 3, n° 6), *равномерно сходится на X.*

В самом деле, поскольку $\mathscr{B}(X; Y)$ полно (следствие 1 предложения 2), это вытекает из предложения 11 § 3 главы IX и определения равномерно сходящегося ряда.

Замечание 1. Если $\sum_{n=0}^{\infty} \| u_n \| < +\infty$, то для любого $x \in X$ имеем $\sum_{n=0}^{\infty} \| u_n(x) \| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \| u_n \| < +\infty$; другими словами, каждый из рядов с общим членом $u_n(x)$ ($x \in X$) абсолютно сходится в пространстве Y; но обратное неверно. Чтобы избежать всякой неясности,

иногда тот факт, что ряд с общим членом $\| u_n \|$ сходится, выражают, говоря, что ряд с общим членом u_n *нормально сходится*. Ряд может равномерно сходиться на X, но будучи нормально сходящимся; например, это имеет место для ряда (u_n) в пространстве $\mathscr{B}(\mathbf{R}; \mathbf{R})$, определенного следующим образом: $u_n(x) = \frac{1}{n} \sin x$ в интервале $[n\pi, (n+1)\pi]$ и $u_n(x) = 0$ вне этого интервала.

Если Y — *нормированная алгебра* (гл. IX, § 3, п° 7) над недискретным нормированным коммутативным телом K, то $\mathscr{B}(X; Y)$ есть алгебра над K; кроме того, норма $\| u \|$ *согласуется* тогда с этой структурой алгебры, ибо

$$\| uv \| = \sup_{x \in X} \| u(x) v(x) \| \leqslant \sup_{x \in X} (\| u(x) \| \, \| v(x) \|) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x \in X} \| u(x) \| \cdot \sup_{x \in X} \| v(x) \| = \| u \| \, \| v \|.$$

Иначе говоря, $\mathscr{B}(X; Y)$ является тогда *нормированной алгеброй* над телом K.

Предложение 4. *Пусть* X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *и* Y — *нормированные векторные пространства над недискретным нормированным телом* K *и* $X = \coprod_{i=1}^{n} X_i$. *Множество всех полилинейных отображений* X *в* Y *замкнуто в пространстве* $\mathscr{F}_s(X; Y)$.

В самом деле, это множество образовано всеми $u \in \mathscr{F}(X; Y)$, удовлетворяющими соотношениям

$$\left.\begin{aligned} u(x_1, \ldots, x_i' + x_i'', \ldots, x_n) &= u(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n) + u(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_n), \\ u(x_1, \ldots, \lambda x_i, \ldots, x_n) &= \lambda u(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$(1 \leqslant i \leqslant n$, x_i, x_i', x_i'' — произвольные элементы из X_i, λ — произвольное в $K)$; обе части каждого из соотношений (1) — непрерывные функции от u в $\mathscr{F}_s(X; Y)$ (§ 1, п° 2, замечание 6), откуда и следует предложение (гл. I, 2-е изд., § 8, следствие 1 предложения 6; 3-е изд., § 8, предложение 2).

Предложение 5. *При условиях предложения* 4 *множество* $\mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ *всех непрерывных полилинейных отображений* X *в* Y *замкнуто в* $\mathscr{F}(X; Y)$, *наделенном топологией ограниченной сходимости; оно полно в равномерной структуре ограниченной сходимости, когда* Y *полно.*

Действительно, если $\mathfrak{S}$ — множество всех ограниченных подмножеств из X, то $\mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ есть пересечение множества всех полилинейных отображений X в Y с множеством $\mathscr{B}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ (гл. IX, § 3, теорема 1); справедливость предложения вытекает поэтому из предложения 4 и следствия 1 предложения 2.

Всюду далее в этом n° K *означает коммутативное недискретное нормированное тело.*

Тогда $\mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ есть векторное подпространство в $\mathscr{F}(X; Y)$. Пусть B — единичный шар произведения X, т. е. множество тех $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, для которых $\sup_{1\leqslant i\leqslant n} \| x_i \| \leqslant 1$; отображение $u \mapsto u \mid B$ пространства $\mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ в $\mathscr{B}(B; Y)$ *инъективно*; кроме того, прообраз равномерной структуры *равномерной* сходимости в $\mathscr{B}(B; Y)$ относительно этого отображения есть равномерная структура *ограниченной* сходимости в $\mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$. Действительно, всякое ограниченное множество в X содержится в множестве вида μB (где $\mu \in K^*$), и сказать, что для некоторого элемента $u \in \mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ и всех $x \in \mu B$ выполняется неравенство $\| u(x) \| \leqslant a$, равносильно тому, чтобы сказать, что $\| u(x) \| \leqslant a/|\mu|^n$ для всех $x \in B$. Отсюда непосредственно следует, что число $\| u \| = \sup_{x \neq 0} (\| u(x) \| / \| x \|)$ является *нормой* на $\mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, определяющей в этом пространстве равномерную структуру ограниченной сходимости, и, очевидно,

$$\| u(x_1, \ldots, x_n) \| \leqslant \| u \| \, \| x_1 \| \ldots \| x_n \|. \qquad (2)$$

Если не оговорено противное, то, рассматривая $\mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ как нормированное пространство, мы всегда будем иметь в виду эту норму.

Предложение 6. *Полилинейное отображение*

$$(u, x_1, \ldots, x_n) \mapsto u(x_1, \ldots, x_n)$$

нормированного пространства $\mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y) \times X_1 \times \ldots \times X_n$ *в* Y *непрерывно.*

Это — непосредственное следствие неравенства (2) (гл. IX, § 3, теорема 1).

Предложение 7. *Пусть X, Y, Z — нормированные пространства над K. Каноническое отображение нормированного пространства $\mathscr{L}(X, Y; Z)$ в пространство линейных отображений X в $\mathscr{L}(Y; Z)$, относящее каждому $u \in \mathscr{L}(X, Y; Z)$ отображение $x \mapsto u(x, \cdot)$, есть изометрия $\mathscr{L}(X, Y; Z)$ на $\mathscr{L}(X; \mathscr{L}(Y; Z))$.*

Это непосредственно следует из определений и соотношения

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \left(\sup_{\|y\| \leqslant 1} \|u(x, y)\| \right) = \sup_{\|x\| \leqslant 1,\ \|y\| \leqslant 1} \|u(x, y)\|.$$

Предложение 8. *Пусть X, Y, Z — нормированные пространства над K. Билинейное отображение $(u, v) \mapsto v \circ u$ произведения $\mathscr{L}(X; Y) \times \mathscr{L}(Y; Z)$ в $\mathscr{L}(X; Z)$ непрерывно.*

Действительно, для любых $u \in \mathscr{L}(X; Y)$ и $v \in \mathscr{L}(Y; Z)$, более точно, имеем

$$\|v \circ u\| \leqslant \|u\| \, \|v\|, \tag{3}$$

ибо, каково бы ни было $x \in X$, в силу (2)

$$\|v(u(x))\| \leqslant \|v\| \, \|u(x)\| \leqslant \|v\| \, \|u\| \, \|x\|.$$

В частности, на множестве $\mathscr{L}(X)$ всех *непрерывных эндоморфизмов* нормированного пространства X над K норма $\|u\|$ согласуется со структурой *алгебры* над K.

Замечание 2. Множество $\mathscr{L}(\mathbf{R}^m; \mathbf{R}^n)$ всех (необходимо непрерывных) линейных отображений $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$ отождествимо с множеством $\mathbf{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ всех матриц с n строками и m столбцами над $\mathbf{R}$, т. е. с $\mathbf{R}^{mn}$; на $\mathscr{L}(\mathbf{R}^m; \mathbf{R}^n)$ равномерные структуры ограниченной сходимости (относительно евклидова расстояния в $\mathbf{R}^m$), компактной сходимости и простой сходимости отождествляются тогда с *аддитивной* равномерной структурой в $\mathbf{R}^{mn}$. В самом деле, возьмем в $\mathbf{R}^n$ норму $\|x\| = \sup_i |x_i|$ для $x = (x_i)$, и пусть (e_j) — канонический базис в $\mathbf{R}^m$; если u и v — такие линейные отображения $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$, что

$$\|u(e_j) - v(e_j)\| \leqslant \varepsilon \quad (1 \leqslant j \leqslant m),$$

то для матриц

$$U = (\alpha_{ij}) \text{ и } V = (\beta_{ij})$$

этих отображений будем иметь $|\alpha_{ij} - \beta_{ij}| \leqslant \varepsilon$ для всех пар (i, j); и обратно, если эти неравенства выполнены, то для любой точки x куба с центром 0 и стороной a в $\mathbf{R}^m$ будем иметь

$$\|u(x) - v(x)\| \leqslant m a \varepsilon.$$

3. Свойства счетности пространств непрерывных функций

Теорема 1. *Пусть X — компактное пространство.*

а) *Если X метризуемо, то для каждого метризуемого равномерного пространства Y счетного типа* (гл. IX, § 2, n° 8) *метризуемое пространство $\mathscr{C}_u(X; Y)$ всех непрерывных отображений X в Y, наделенное топологией равномерной сходимости, будет счетного типа.*

б) *Обратно, если метризуемое пространство $\mathscr{C}_u(X; \mathbf{R})$ есть пространство счетного типа, то X метризуемо.*

а) Пусть d (соотв. d') — расстояние, согласующееся с топологией пространства X (соотв. равномерной структурой пространства Y); как мы знаем, $\delta(f, g) = \sup_{x \in X} d'(f(x), g(x))$ есть расстояние, определяющее структуру равномерной сходимости в $\mathscr{C}(X; Y)$, состоящем из ограниченных функций, поскольку X компактно (n° 1). Обозначим через G_{mn} для каждой пары целых чисел $m > 0$, $n > 0$ множество тех функций $f \in \mathscr{C}(X; Y)$, для которых $d(x, x') \leqslant 1/m$ влечет $d'(f(x), f(x')) \leqslant 1/n$; так как всякая функция $f \in \mathscr{C}(X; Y)$ равномерно непрерывна (гл. II, § 4, теорема 2), то $\mathscr{C}(X; Y)$ при любом $n > 0$ является объединением всех G_{mn} ($m > 0$). Пусть $\{a_1, \ldots, a_{p(m)}\}$ — такое конечное множество в X, что открытые шары с центрами a_i ($1 \leqslant i \leqslant p(m)$) и радиусом $1/m$ образуют покрытие пространства X; пусть, с другой стороны, $(b_r)_{r \in \mathbf{N}}$ — счетная всюду плотная последовательность в Y. Для каждого отображения φ множества $\{1, \ldots, p(m)\}$ в $\mathbf{N}$ обозначим через H_φ множество тех $f \in G_{mn}$, для которых $d'(f(a_k), b_{\varphi(k)}) \leqslant 1/n$ ($1 \leqslant k \leqslant p(m)$). По определению точек b_r, G_{mn} есть объединение всех H_φ ($\varphi \in \mathbf{N}^{p(m)}$); пусть C_{mn} — множество тех $\varphi \in \mathbf{N}^{p(m)}$, для которых $H_\varphi \neq \varnothing$, и каждому $\varphi \in C_{mn}$ поставлено в соответствие по элементу g_φ из H_φ; обозначим, наконец, через L_{mn} счетное множество всех g_φ ($\varphi \in C_{mn}$). Пусть $f \in G_{mn}$ и φ — элемент из C_{mn}, для которого $f \in H_\varphi$; из определений сразу вытекает, что $d'(f(x), g_\varphi(x)) \leqslant 4/n$ для всех $x \in X$, т. е. $\delta(f, g_\varphi) \leqslant 4/n$. Отсюда следует, что объединение всех L_{mn} всюду плотно в $\mathscr{C}_u(X; Y)$: действительно, для каждого целого $n > 0$ и каждого $f \in \mathscr{C}(X; Y)$ существует такое m, что $f \in G_{mn}$, откуда явствует, что расстояние от f до L_{mn} не превышает $4/n$.

б) Пусть $I = [0, 1]$; как равномерное подпространство пространства $\mathscr{C}_u(X; \mathbf{R})$, $\mathscr{C}_u(X; I)$ есть пространство счетного типа; пусть (f_n) — всюду плотная последовательность в этом пространстве. Рассмотрим произведение $K = I^{\mathbf{N}}$ и отображение $\varphi: x \mapsto (f_n(x))$ пространства X в K, очевидно, непрерывное; φ *инъективно*: действительно, согласно определению последовательности (f_n), выполнение равенства $f_n(x) = f_n(x')$ для всех n влечет путем перехода к пределу, что $f(x) = f(x')$ для *каждой* функции $f \in \mathscr{C}(X; I)$; но если $x \neq x'$, это невозможно в силу аксиомы (O_{IV}), примененной к точке x и ее окрестности V, не содержащей x' (гл. IX, § 1, теорема 2). Отсюда заключаем, что компактное пространство X гомеоморфно подпространству $\varphi(X)$ пространства K (гл. I, 2-е изд., § 10, следствие 2 теоремы 2; 3-е изд., § 9, следствие 2 теоремы 2); но так как K метризуемо и счетного типа, то то же справедливо для $\varphi(X)$, а значит и для X. Теорема доказана. 38 12

Следствие. *Пусть X — локальное компактное пространство с топологией, обладающей счетным базисом, и Y — метризуемое равномерное пространство счетного типа.*

а) *Пространство $\mathscr{L}$ всех непрерывных отображений X в Y, имеющих предел на бесконечности, наделенное топологией равномерной сходимости на X, есть метризуемое пространство счетного типа.*

б) *Пространство $\mathscr{C}_c(X; Y)$ всех непрерывных отображений X в Y, наделенное топологией компактной сходимости, есть метризуемое пространство счетного типа.*

а) Пусть X' — компактное пространство, получаемое присоединением к X бесконечно удаленной точки (гл. I, 2-е изд., § 10, теорема 4; 3-е изд., § 9, теорема 4); по определению всякая функция f из $\mathscr{L}$ продолжается единственным образом до непрерывного отображения $\bar{f}$ пространства X' в Y, так что $f \mapsto \bar{f}$ есть биекция $\mathscr{L}$ на $\mathscr{C}(X'; Y)$; кроме того, в силу предложения 6 § 1 эта биекция есть гомеоморфизм пространства $\mathscr{L}$ на $\mathscr{C}_u(X'; Y)$. Остается применить к X' и Y теорему 1, заметив еще, что X' метризуемо (гл. IX, § 2, следствие предложения 16).

б) Пусть (U_n) — такое покрытие пространства X относительно компактными открытыми множествами, что всякое компактное множество в X содержится в одном из U_n (гл. I, 2-е изд., стр. 124

русского перевода; 3-е изд., § 9, следствие 1 предложения 15). Топология компактной сходимости в $\mathscr{C}(X; Y)$ совпадает с топологией $\mathfrak{S}$-сходимости, где $\mathfrak{S}$ — множество всех $\overline{U}_n$. Следовательно (§ 1, n° 2, замечание 3), пространство $\mathscr{C}_c(X; Y)$ гомеоморфно подпространству произведения $\prod_n \mathscr{C}_u(\overline{U}_n; Y)$; поскольку каждое из компактных пространств $\overline{U}_n$ обладает счетным базисом, оно метризуемо (гл. IX, § 2, предложение 16); значит, в силу теоремы 1 каждое из $\mathscr{C}_u(\overline{U}_n; Y)$ метризуемо и счетного типа, и потому то же верно также для $\mathscr{C}_c(X; Y)$.

Заметим, что пространство всех ограниченных непрерывных числовых функций на $\mathbf{R}$, наделенное топологией равномерной сходимости, не есть пространство счетного типа (упражнение 4).

4. Топология компактной сходимости

Теорема 2. *Пусть X — топологическое пространство и Y — равномерное пространство. Для каждой пары (K, U), где K — компактное множество в X и U — открытое множество в Y, обозначим через $\boldsymbol{T}(K, U)$ множество всех непрерывных отображений $u\colon X \to Y$, для которых $u(K) \subset U$. Тогда множества вида $\boldsymbol{T}(K, U)$ порождают* (гл. I, § 2, n° 3) *топологию компактной сходимости в $\mathscr{C}(X, Y)$.*

Пусть Y' — отделимое равномерное пространство, ассоциированное с Y (гл. II, 2-е изд., § 1, n° 4; 3-е изд., § 3, n° 8) и $i\colon Y \to Y'$ — каноническое отображение Y на Y'. Топология компактной сходимости есть слабейшая из топологий, при которых непрерывны все отображения $u \mapsto (i \circ u) \mid K$ пространства $\mathscr{C}(X; Y)$ в $\mathscr{C}_u(K; Y')$, где K пробегает все компактные множества из X (§ 1, предложение 4). Поэтому мы получим систему образующих топологии пространства $\mathscr{C}_c(X; Y)$, беря для каждого компактного множества K из X какую-либо систему образующих топологии пространства $\mathscr{C}_u(K; Y')$ и ее прообраз в $\mathscr{C}(X; Y)$ и рассматривая объединение в $\mathfrak{P}(\mathscr{C}(X; Y))$ всех получаемых таким образом множеств подмножеств $\mathscr{C}(X; Y)$. С другой стороны, всякое открытое множество в Y имеет вид $i^{-1}(U')$, где U' открыто в Y' (гл. II, 3-е изд., § 3, предложение 12); поэтому $\boldsymbol{T}(K, i^{-1}(U'))$ для любого ком-

пактного $K' \supset K$ является прообразом $\boldsymbol{T}(K, U')$ относительно отображения $\mathscr{C}(X; Y) \to \mathscr{C}_u(K', Y')$ и доказательство теоремы сводится к случаю, когда X *компактно*, а Y *отделимо*, что мы далее и будем предполагать.

Покажем сначала, что $\boldsymbol{T}(K, U)$ *открыто* в $\mathscr{C}_c(X; Y)$. Пусть u_0 — точка этого множества; поскольку $u_0(K)$ компактно (гл. I, 2-е изд., § 10, следствие 1 теоремы 2; 3-е изд., § 9, следствие 1 теоремы 2) и содержится в открытом множестве U, существует симметричное окружение V для Y такое, что $V(u_0(K)) \subset U$ (гл. II, 2-е изд., § 4, следствие предложения 1; 3-е изд., § 4, следствие предложения 4). Пусть W — окрестность точки u_0 в $\mathscr{C}_c(X; Y)$, образованная теми непрерывными отображениями $u\colon X \to Y$, для которых $(u(x), u_0(x)) \in V$ при всех $x \in K$. Для этих отображений, очевидно, имеем $u(K) \subset V(u_0(K)) \subset U$, откуда $u \in \boldsymbol{T}(K, U)$ и, следовательно, $W \subset \boldsymbol{T}(K, U)$, чем наше утверждение доказано.

Обратно, пусть W — окрестность точки $u_0 \in \mathscr{C}_c(X; Y)$; покажем, что W содержит пересечение конечного числа окрестностей u_0 вида $\boldsymbol{T}(K, U)$. Можно предположить, что W есть множество тех $u \in \mathscr{C}(X; Y)$, для которых $(u(x), u_0(x)) \in V$ при всех $x \in X$, где V — заданное окружение для Y. Так как u_0 непрерывно на X, то оно равномерно непрерывно (гл. II, § 4, теорема 2); пусть V_1 — симметричное окружение для Y, открытое в $Y \times Y$ и такое, что $\overset{2}{V}_1 \subset V$. Существует покрытие пространства X конечным числом компактных множеств K_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ таких, что $u_0(K_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ малы порядка V_1. Пусть U_i — открытое множество $V_1(u_0(K_i))$ и u — непрерывное отображение X в Y, принадлежащее пересечению n множеств $\boldsymbol{T}(K_i, U_i)$ (являющихся окрестностями u_0). Тогда $u(x)$ для всех $x \in K_i$ принадлежит U_i, и потому $u_0(x)$ и $u(x)$ близки порядка $\overset{2}{V}_1$, а следовательно, близки порядка V. Так как каждое $x \in X$ принадлежит хотя бы одному K_i, то $u \in W$, и теорема доказана.

Этот результат подсказывает введение следующего определения:

Определение 1. *Пусть X и Y — топологические пространства (не обязательно равномеризуемые). Для любой пары (K, U), где K — компактное множество в X, а U — открытое*

множество в Y, обозначим через $\boldsymbol{T}(K, U)$ множество всех $u \in \mathscr{C}(X; Y)$, для которых $u(K) \subset U$. Топологией компактной сходимости в $\mathscr{C}(X; Y)$ называется топология, порождаемая множеством всех подмножеств вида $\boldsymbol{T}(K; U)$; топологическое пространство, получаемое наделением $\mathscr{C}(X; Y)$ этой топологией, обозначается $\mathscr{C}_c(X; Y)$.

Из теоремы 2 следует, что в случае, когда Y — равномерное пространство, это определение совпадает с данным в n° 3 § 1.

Топология, индуцируемая в множестве $H \subset \mathscr{C}(X; Y)$ из $\mathscr{C}_c(X; Y)$, будет по-прежнему называться топологией компактной сходимости.

Пример. Пусть I — интервал $[0, 1]$ в $\mathbf{R}$; пространство $\mathscr{C}_c(I; Y)$ для любого топологического пространства Y называется *пространством путей* в Y; для каждого $y \in Y$ его подпространство $\Omega_y(Y)$, образованное путями u, для которых $u(0) = u(1) = y$, называется *пространством петель* (в Y) *в точке* y.

Замечания. 1) Говорят также, что топология, индуцированная в $\mathscr{C}(X; Y)$ топологией произведения $Y^X = \mathscr{F}(X; Y)$, есть *топология простой сходимости* (причем Y не обязательно равномеризуемо); она порождается множествами вида $\boldsymbol{T}(\{x\}, U)$, где $x \in X$ и U открыто в Y, и следовательно, мажорируется топологией компактной сходимости. Отсюда вытекает, что *если Y отделимо, то пространство $\mathscr{C}_c(X; Y)$ отделимо* (гл. I, 2-е изд., § 6, следствие предложения 4; 3-е изд., § 8, следствие предложения 5).

2) Пусть $\mathfrak{S}$ — система образующих топологии пространства Y и $\mathfrak{K}$ — некоторое множество компактных множеств из X, обладающее следующим свойством:

(R) Для каждого компактного множества L в X и каждой его окрестности V существует *конечное* число множеств $K_i \in \mathfrak{K}$ таких, что $L \subset \bigcup_i K_i \subset V$.

Тогда $\boldsymbol{T}(K, U)$ $(K \in \mathfrak{K}, U \in \mathfrak{S})$ — *система образующих* топологии компактной сходимости в $\mathscr{C}(X; Y)$. Действительно, достаточно доказать, что для каждого компактного множества L в X, каждого открытого множества V в Y и каждого $u \in \boldsymbol{T}(L, V)$ существует конечное число пар (K_i, U_i), где $K_i \in \mathfrak{K}$ и $U_i \in \mathfrak{S}$, таких,

что $u \in \bigcap_i \boldsymbol{T}(K_i, U_i) \subset \boldsymbol{T}(L, V)$. Заметим сначала, что для каждой конечной последовательности (S_k) множеств из $\mathfrak{S}$ и каждого компактного множества M в X, по определению, $\boldsymbol{T}\left(M, \bigcap_k S_k\right) = \bigcap_k \boldsymbol{T}(M, S_k)$. Поэтому прежде всего можно заменить $\mathfrak{S}$ множеством пересечений всевозможных конечных семейств множеств из $\mathfrak{S}$, другими словами предположить, что $\mathfrak{S}$ есть *базис* топологии пространства Y. По предположению, $u(L)$ квазикомпактно и содержится в V, так что существует конечное число множеств $U_i \in \mathfrak{S}$, содержащихся в V и покрывающих $u(L)$. Множества $u^{-1}(U_i)$ открыты в X и покрывают L. Поэтому каждое $x \in L$ обладает компактной окрестностью N_x в L, содержащейся в одном из $u^{-1}(U_i)$, и L может быть покрыто конечным числом этих множеств $N_{x_j} = L_j$; обозначим для каждого j через $i(j)$ какой-либо из индексов i, для которых $L_j \subset u^{-1}(U_i)$. Тогда для каждого индекса j существует, согласно (R), конечное число множеств $K_{jk} \subset u^{-1}(U_{i(j)})$, принадлежащих $\mathfrak{K}$ и покрывающих L_j. Для каждого $v \in \bigcap_{j,k} \boldsymbol{T}(K_{jk}, U_{i(j)})$ будем иметь $\bigcup_k v(K_{jk}) \subset U_{i(j)}$, откуда $v(L_j) \subset U_{i(j)}$ и $v(L) = \bigcup_j v(L_j) \subset \bigcup_j U_{i(j)} \subset V$, чем наше утверждение и доказано.

Теорема 3. *Пусть X, Y, Z — топологические пространства и f — отображение $X \times Y$ в Z. Если f непрерывно, то $\tilde{f}: x \mapsto f(x, \cdot)$ есть непрерывное отображение X в $\mathscr{C}_c(Y; Z)$. Обратное справедливо, если Y локально компактно.*

Предположим, что f непрерывно, и докажем непрерывность $\tilde{f}$; требуется доказать, что для каждого компактного множества K из Y и каждого открытого множества U из Z прообраз V множества $\boldsymbol{T}(K, U)$ относительно отображения $\tilde{f}$ открыт в X. Итак, пусть $x_0 \in V$. Для каждого $y \in K$ имеем $f(x_0, y) \in U$, и так как f непрерывно, то имеются окрестность V_y точки x_0 в X и окрестность W_y точки y в Y такие, что $f(V_y \times W_y) \subset U$. Поскольку K

компактно, существует конечное число точек $y_i \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ таких, что множества W_{y_i} покрывают K. Пусть V' — пересечение окрестностей V_{y_i} точки x_0; V' — также окрестность точки x_0; для всех $x \in V'$ и $y \in K$ будем иметь $f(x, y) \in U$, поскольку y содержится в некотором W_{y_i}, а $x \in V_{y_i}$ при любом i; таким образом, $V' \subset V$, так что V есть окрестность каждой своей точки и, значит, открыто в X.

Обратно, предположив, что $\tilde{f}$ непрерывно и Y локально компактно, докажем непрерывность f. Пусть $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ и U — открытая окрестность точки $f(x_0, y_0)$ в Z; докажем, что существуют окрестность V точки x_0 в X и окрестность W точки y_0 в Y такие, что $f(V \times W) \subset U$. Поскольку $y \mapsto f(x_0, y)$ непрерывно, существует *компактная* окрестность W точки y_0 такая, что $f(\{x_0\} \times W) \subset U$. С другой стороны, так как $\tilde{f}$ непрерывно, то множество V тех $x \in X$, для которых $f(x, \cdot) \in \boldsymbol{T}(W, U)$ (т. е. $f(x, y) \in U$ для всех $y \in W$), открыто в X и есть, таким образом, окрестность точки x_0. Но тогда $f(V \times W) \subset U$, и теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть X — локально компактное пространство, Y — топологическое пространство и $H \subset \mathscr{C}(X; Y)$. Тогда в H топология компактной сходимости является слабейшей из топологий, при которых отображение $(u, x) \mapsto u(x)$ произведения $H \times X$ в Y непрерывно.*

В самом деле, в силу теоремы 3 непрерывность этого отображения равносильна непрерывности канонической инъекции $H \to \mathscr{C}_c(X; Y)$.

Замечания. 3) Пусть X — локально компактное пространство и Y — отделимое топологическое пространство. Если $\mathscr{T}$ — топология в множестве $H \subset \mathscr{C}(X; Y)$, при которой отображение $(u, x) \mapsto u(x)$ непрерывно на $H \times X$, и, кроме того, H *компактно* в этой топологии, то $\mathscr{T}$ совпадает с топологией компактной сходимости. В самом деле, в силу следствия 1 $\mathscr{T}$ мажорирует эту последнюю, и так как топология компактной сходимости отделима, то эти топологии совпадают. Заметим, что если, кроме того, Y *вполне регулярно*, то H *равностепенно непрерывно* для любой равномерной структуры, согласующейся с топологией пространства Y (§ 2, следствие 3 теоремы 2), и для каждого компактного множества K в X множество $H(K) = \bigcup_{x \in K} H(x)$ *компактно*, как образ произведения $H \times K$ при непрерывном отображении $(u, x) \mapsto u(x)$.

Следствие 2. *Пусть X, Y, Z — топологические пространства, причем X отделимо, а Y локально компактно. Тогда сужение на $\mathscr{C}(X \times Y; Z)$ канонической биекции $\mathscr{F}(X \times Y; Z) \to \mathscr{F}(X; \mathscr{F}(Y; Z))$* (Теор. множ., Сводка результ., § 4, n° 14) *есть гомеоморфизм $\mathscr{C}_c(X \times Y; Z)$ на $\mathscr{C}_c(X; \mathscr{C}_c(Y; Z))$.*

Ясно, что в силу теоремы 3 это сужение является биекцией

$$\rho\colon \mathscr{C}(X \times Y; Z) \to \mathscr{C}(X; \mathscr{C}_c(Y; Z)).$$

Остается убедиться в том, что топология компактной сходимости в $\mathscr{C}(X \times Y; Z)$ является прообразом относительно ρ топологии компактной сходимости в $\mathscr{C}(X; \mathscr{C}_c(Y; Z))$. Поскольку топология в $\mathscr{C}_c(Y; Z)$ обладает системой образующих, состоящей из всевозможных $\boldsymbol{T}(K, U)$, где K — компактное множество в Y, а U — открытое множество в Z, из замечания 2 следует, что топология в $\mathscr{C}_c(X; \mathscr{C}_c(Y; Z))$ порождается множествами вида $\boldsymbol{T}(J, \boldsymbol{T}(K, U))$, где K и U описаны выше, а J — компактное множество в X. Но образ множества $\boldsymbol{T}(J, \boldsymbol{T}(K, U))$ при отображении ρ^{-1} есть не что иное, как $T(J \times K, U)$; следовательно, это открытое множество, чем уже доказано, что ρ непрерывно. Обратно, заметим, что множества вида $J \times K$ в $X \times Y$, где J — компактное множество в X, а K — компактное множество в Y, удовлетворяют условию (R) замечания 2: действительно, если L — компактное множество в $X \times Y$ и V — окрестность L в $X \times Y$, то, поскольку X и Y — отделимы, проекции $M = \mathrm{pr}_1(L)$, $N = \mathrm{pr}_2(L)$ компактны, и $V \cap (M \times N)$ есть окрестность L в компактном пространстве $M \times N$, так что всякая точка из L обладает в $M \times N$ окрестностью вида $J \times K \subset V$, где $J \subset M$ и $K \subset N$ компактны; отсюда вытекает наше утверждение, ибо L может быть покрыто конечным числом этих окрестностей. Таким образом, множества вида $\boldsymbol{T}(J \times K; U)$, где U открыто в Z, а J (соотв. K) компактно в X (соотв. Y), порождают топологию пространства $\mathscr{C}_c(X \times Y; Z)$; но мы видели, что образ $\boldsymbol{T}(J \times K, U)$ при отображении ρ есть открытое множество $\boldsymbol{T}(J, \boldsymbol{T}(K, U))$ в $\mathscr{C}_c(X; \mathscr{C}_c(Y; Z))$, чем и завершается доказательство того, что ρ — гомеоморфизм.

Отметим, что если Z предположить, кроме того, равномеризуемым, то следствие 2 тривиальным образом вытекало бы из предложения 2 § 1.

Предложение 9. *Пусть X, Y, Z — топологические пространства, причем Y локально компактно. Тогда отображение*

$(u, v) \mapsto v \circ u$ произведения $\mathscr{C}_c(X; Y) \times \mathscr{C}_c(Y; Z)$ в $\mathscr{C}_c(X; Z)$ непрерывно.

Требуется доказать, что для каждого компактного множества K из X и каждого открытого множества U из Z множество R тех пар (u, v), для которых $v(u(K)) \subset U$, открыто в $\mathscr{C}_c(X; Y) \times \mathscr{C}_c(Y; Z)$. Пусть (u_0, v_0) — элемент множества R. Тогда $u_0(K)$ — компактное подмножество локально выпуклого пространства Y, содержащееся в открытом множестве $v_0^{-1}(U)$; поэтому $u_0(K)$ обладает компактной окрестностью L, содержащейся в $v_0^{-1}(U)$ (гл. I, 2-е изд., § 10, предложение 10; 3-е изд., § 9, предложение 10). Множество V тех $u \in \mathscr{C}_c(X; Y)$, для которых $u(K) \subset \overset{\circ}{L}$, есть окрестность u_0, а множество W тех $v \in \mathscr{C}_c(Y; Z)$, для которых $v(L) \subset U$, есть окрестность v_0; при этом $(u, v) \in V \times W$ влечет $v(u(K)) \subset U$, и предложение доказано.

5. *Топологии в группах гомеоморфизмов*

Предложение 10. *Пусть X — равномерное пространство и H — равностепенно непрерывное множество гомеоморфизмов X на себя. Если наделить H и H^{-1} топологией простой сходимости на X, то отображение $u \mapsto u^{-1}$ пространства H^{-1} на H будет непрерывно.*

Достаточно доказать, что для каждого $x_0 \in X$ отображение $u \mapsto u^{-1}(x_0)$ пространства H^{-1} в X непрерывно в каждой точке $u_0 \in H^{-1}$. Пусть V — симметричное окружение для X и $y_0 = u_0^{-1}(x_0)$. По предположению, существует такое симметричное окружение U для X, что $(x, x_0) \in U$ влечет $(u^{-1}(x), u^{-1}(x_0)) \in V$ для всех $u \in H^{-1}$. Возьмем $u \in H^{-1}$ близким порядка $W(\{y_0\}, U)$ к u_0; тогда будем иметь $(u(y_0), u_0(y_0)) \in U$, т. е. $(u(y_0), x_0) \in U$. Отсюда $(y_0, u^{-1}(x_0)) \in V$, т. е. $(u_0^{-1}(x_0), u^{-1}(x_0)) \in V$, и предложение доказано.

Следствие. *Пусть X — равномерное пространство и H — равностепенно непрерывная группа гомеоморфизмов X на себя. Тогда в H топология простой сходимости на X согласуется* (гл. III, § 1, п° 1) *со структурой группы.*

Это вытекает из предложения 10, а также следствия 5 предложения 1 § 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Пусть X — компактное пространство и Γ — группа всех гомеоморфизмов X на себя. Тогда в Γ топология равномерной сходимости на X согласуется* (гл. III, § 1, п° 1) *со структурой группы.*

Как мы уже знаем (предложение 9), отображение $(u, v) \mapsto v \circ u$ произведения $\Gamma \times \Gamma$ в Γ непрерывно в этой топологии, так что все сводится к доказательству непрерывности отображения $u \mapsto u^{-1}$ в каждой точке $u_0 \in \Gamma$. Поскольку u_0^{-1} равномерно непрерывно на X, каково бы ни было симметричное окружение V для X, существует такое окружение W для X, что $(x, x') \in W$ влечет $(u_0^{-1}(x), u_0^{-1}(x')) \in V$. Поэтому, если $u \in \Gamma$ таково, что $(u_0(x), u(x)) \in W$ для всех $x \in X$, то из предыдущего следует, что $(x, u_0^{-1}(u(x))) \in V$ для всех $x \in X$, откуда, поскольку u биективно, $(u^{-1}(x), u_0^{-1}(x)) \in V$ для каждого $x \in X$, и предложение доказано.

Пусть теперь X — локально компактное пространство и Γ — группа всех гомеоморфизмов X на себя; в Γ топология *компактной сходимости* на X *не обязательно согласуется* со структурой группы (упражнение 17). Обозначим через X' компактное пространство, получаемое присоединением к X бесконечно удаленной точки ω; всякий гомеоморфизм u пространства X на себя продолжается единственным образом до гомеоморфизма u' пространства X' на себя такого, что $u'(\omega) = \omega$ (гл. I, 2-е изд., § 10, предложение 15; 3-е изд., § 10, следствие предложения 7), так что Γ отождествима с *подгруппой группы Γ' всех гомеоморфизмов пространства X', образованной гомеоморфизмами, оставляющими точку ω неподвижной*. Таким образом, топология, индуцируемая в Γ из $\mathscr{C}_u(X'; X')$, согласуется со структурой группы (предложение 11), и Γ *замкнута* в Γ' (в топологии, индуцируемой из $\mathscr{C}_u(X'; X')$), ибо Γ определяется уравнением $u'(\omega) = \omega$ (§ 1, п° 2, замечание 6). Обозначим через $\mathscr{T}_\beta$ так определенную групповую топологию в Γ; она *мажорирует* топологию компактной сходимости и (в силу предложения 6 § 1) может быть также определена как топология равномерной сходимости на X, наделенном равномерной структурой, индуцируемой единственной равномерной структурой пространства X'.

Топология $\mathscr{T}_\beta$ может быть охарактеризована следующим образом:

Предложение 12. *В группе* Γ *всех гомеоморфизмов локально компактного пространства* X *топология* $\mathscr{T}_\beta$ *есть слабейшая из топологий, при которых непрерывны отображения* $u \mapsto u$ *и* $u \mapsto u^{-1}$ *группы* Γ *в пространство* $\mathscr{C}_c(X; X)$.

Обозначим временно упомянутую слабейшую топологию через $\mathscr{T}'$. Так как $u \mapsto u^{-1}$ непрерывно в $\mathscr{T}_\beta$, а $\mathscr{T}_\beta$ мажорирует топологию компактной сходимости, то ясно, что $\mathscr{T}_\beta$ мажорирует $\mathscr{T}'$. Чтобы доказать обратное, наделим X' его единственной равномерной структурой; пусть $u_0 \in \Gamma$ и V — некоторое окружение для X'; требуется доказать существование компактного множества K в X и симметричного окружения W для X' таких, что если $u \in \Gamma$, а $(u_0(x), u(x)) \in W$ и $(u_0^{-1}(x), u^{-1}(x)) \in W$ для всех $x \in K$, то $(u_0(x), u(x)) \in V$ для всех $x \in X$. Пусть V_1 — такое открытое симметричное окружение для X', что $\overset{2}{V}_1 \subset V$; тогда $K_1 = X' - V_1(\omega)$ компактно в X. Возьмем открытое симметричное окружение W для X' так, чтобы $W \subset V$ и $W(\omega) \cap W(u_0^{-1}(K_1)) = \varnothing$; это возможно в силу предложения 4 § 4 главы II 3-го издания (предложения 1 § 4 главы II 2-го издания), и множество $K_2 = X' - W(\omega)$ будет компактно в X; покажем, что W и компактное множество $K = K_1 \cup K_2$ будут обладать требуемым свойством. Действительно; поскольку $W \subset V$, достаточно доказать, что если $(u_0^{-1}(x), u^{-1}(x)) \in W$ для всех $x \in K_1$ (где $u \in \Gamma$), то $(u(y), \omega) \in V_1$ для всех $y \in W(\omega)$; тогда будем также иметь $(u_0(y), \omega) \in V_1$ и потому $(u_0(y), u(y)) \in \overset{2}{V}_1 \subset V$ для всех $y \in W(\omega) = X' - K_2$. Но если бы $y \in W(\omega)$ и $u(y) \in X' - V_1(\omega) = K_1$, то отсюда вытекало бы, что $y \in u^{-1}(K_1) \subset W(u_0^{-1}(K_1))$, в противоречие с выбором W, и доказательство закончено.

В общем случае группа Γ, наделенная топологией $\mathscr{T}_\beta$, не локально компактна (упражнение 16б)); однако имеет место следующий критерий:

Теорема 4. *Пусть* G *— подгруппа группы* Γ *всех гомеоморфизмов локально компактного пространства* X *на себя. Предположим, что в пространстве* $\mathscr{C}_c(X; X)$ *существует такая окрест-*

ность V тождественного отображения e, что $V \cap G = H$ симметрично в G и относительно компактно в $\mathscr{C}_c(X; X)$. Тогда замыкание $\overline{G}$ подгруппы G в Γ в топологии $\mathscr{T}_\beta$ есть локально компактная группа в топологии, которую индуцирует $\mathscr{T}_\beta$, причем эта индуцированная топология в $\overline{G}$ совпадает с топологией компактной сходимости, а замыкание $\overline{H}$ множества H в $\mathscr{C}_c(X; X)$ есть окрестность элемента e в $\overline{G}$ в этой топологии.

Покажем сначала, что $\overline{H}$ *содержится в* Γ и что в $\overline{H}$ топология, которую индуцирует $\mathscr{T}_\beta$, *совпадает с топологией компактной сходимости.* Пусть $u_0 \in \overline{H}$, являясь, таким образом, пределом в $\mathscr{C}_c(X; X)$ некоторого ультрафильтра Φ в H; поскольку Φ^{-1} (образ Φ при отображении $u \mapsto u^{-1}$) есть базис ультрафильтра в $H \subset \overline{H}$, он сходится в компактном подпространстве $\overline{H}$ пространства $\mathscr{C}_c(X; X)$ к некоторому элементу v_0. Отображение $(u, v) \mapsto uv$ сходится к u_0v_0 по $\Phi \times \Phi^{-1}$ (предложение 9); тем более $u \mapsto uu^{-1} = e$ сходится к u_0v_0 по Φ, так что $u_0v_0 = e$, поскольку $\mathscr{C}_c(X; X)$ отделимо; так же убеждаемся в том, что $v_0u_0 = e$, так что u_0 и v_0 — взаимно обратные биекции пространства X, и первое утверждение доказано. Это рассуждение показывает, кроме того, что $\overline{H}^{-1} = \overline{H}$ и что для каждого ультрафильтра Φ в $\overline{H}$, сходящегося к u_0, Φ^{-1} сходится в $\mathscr{C}_c(X; X)$ к u_0^{-1}; таким образом, отображение $u \mapsto u^{-1}$ пространства $\overline{H}$, наделенного топологией компактной сходимости, в $\mathscr{C}_c(X; X)$ непрерывно (гл. I, 2-е изд., § 6, следствие 1 предложения 9; 3-е изд., § 7, следствие 1 предложения 9). Предложение 12 доказывает тогда, что в $\overline{H}$ топология компактной сходимости совпадает с топологией, которую индуцирует $\mathscr{T}_\beta$.

Кроме того, поскольку топология $\mathscr{T}_\beta$ в Γ мажорирует топологию компактной сходимости, $\overline{H}$ является также замыканием H в $\mathscr{T}_\beta$; но H есть окрестность элемента e в G в топологии компактной сходимости и тем более в топологии, которую индуцирует $\mathscr{T}_\beta$; отсюда следует (гл. I, 3-е изд., § 3, предложение 2), что $\overline{H}$ есть окрестность e в $\overline{G}$ в топологии, которую индуцирует $\mathscr{T}_\beta$, чем доказана локальная компактность $\overline{G}$ в этой топологии. При этом, если W — внутренность V в топологии компактной сходимости, то $W \cap \Gamma$ открыто для $\mathscr{T}_\beta$, и, следовательно, $W \cap \overline{G}$ содержится

в замыкании множества $H = V \cap G$ в топологии $\mathscr{T}_\beta$ (гл. I, 2-е изд., § 1, предложение 3; 3-е изд., § 1, предложение 5); этим доказано, что $\overline{H}$ является также окрестностью e в $\overline{G}$ в топологии компактной сходимости. Наконец, для каждого $u_0 \in \Gamma$ взаимно обратные биекции $v \mapsto u_0 \circ v$ и $v \mapsto u_0^{-1} \circ v$ пространства $\mathscr{C}_c(X; X)$ на себя непрерывны (предложение 9); следовательно, $u_0\overline{H}$ есть окрестность элемента $u_0 \in \overline{G}$ в $\overline{G}$ в топологии компактной сходимости, и теорема доказана.

Следствие. *Пусть G — некоторая группа гомеоморфизмов локально компактного пространства X на себя. Если ее замыкание $\overline{G}$ в $\mathscr{C}_c(X; X)$ компактно, то $\overline{G}$ есть группа гомеоморфизмов пространства X и топология компактной сходимости согласуется со структурой группы в $\overline{G}$, так что $\overline{G}$ — компактная группа.*

Группа гомеоморфизмов локально компактного пространства X, локально компактная (но не компактная) в топологии компактной сходимости, *локально замкнута* в $\mathscr{C}_c(X; X)$ в силу предложения 12 § 9 главы I 3-го издания (предложения 12 § 10 главы I 2-го издания), но *не обязательно замкнута*.

Пусть, например, $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$ — кольцо эндоморфизмов пространства $\mathbf{R}^n$, отождествленное с кольцом $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ всех квадратных матриц n-го порядка над $\mathbf{R}$ и наделенное топологией компактной сходимости в этом кольце; группа $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$, отождествленная с группой всех обратимых матриц, локально компактна, но всюду плотна (гл. VI, § 1, предложение 6).

Упражнения

1) Пусть X — топологическое пространство и Y — метрическое пространство. Показать, что множество всех отображений X в Y, колебание которых в каждой точке из X (гл. IX, § 2, n° 3) $\leqslant \alpha$ (где α — заданное число > 0), замкнуто в пространстве $\mathscr{F}_u(X; Y)$.

2) Пусть X — множество; показать, что отображение $u \mapsto \sup_{x \in X} u(x)$ пространства $\mathscr{B}(X; \mathbf{R})$ в $\mathbf{R}$ непрерывно.

3) Пусть X — метрическое пространство и d — его расстояние. Для каждого $x \in X$ обозначим через d_x непрерывную на X числовую функцию $y \mapsto d(x, y)$. Показать, что отображение $x \mapsto d_x$ есть *изометрия* пространства X на некоторое подпространство пространства $\mathscr{C}_u(X; \mathbf{R})$ (наделенного отклонением $\delta(u, v) = \sup_{x \in X} |u(x) - v(x)|$).

4) Для того чтобы вполне регулярное пространство X обладало тем свойством, что метризуемое пространство $\mathscr{C}_u(X; \mathbf{R})$ есть пространство счетного типа, *необходимо* (и достаточно), чтобы X было метризуемым компактным пространством. [Рассматривая компактификацию Стоуна — Чеха пространства X (гл. IX, § 1, упражнение 7), показать, что X должно быть метризуемо; далее заметить, что $\mathscr{C}_u(\mathbf{Z}; \mathbf{R})$ не есть пространство счетного типа.]

5) Пусть X — вполне регулярное пространство.

а) Для того чтобы каждая точка пространства $\mathscr{C}_c(X; \mathbf{R})$ имела счетную фундаментальную систему окрестностей, необходимо, чтобы в X существовала возрастающая последовательность (K_n) компактных множеств такая, что каждое компактное множество из X содержится в некотором K_n. Тогда $\mathscr{C}_c(X; Y)$ для всякого метризуемого пространства Y метризуемо.

б) Для того чтобы $\mathscr{C}_c(X; \mathbf{R})$ было метризуемо и счетного типа, необходимо и достаточно, чтобы все компактные подпространства K_n пространства X были метризуемы. [Использовать упражнение 4.] Тогда $\mathscr{C}_c(X; Y)$ метризуемо и счетного типа для всякого метризуемого пространства Y счетного типа.

*6) а) Пусть X — топологическое пространство, Y — метрическое пространство, d — расстояние в Y, n — целое > 0 и $S \subset X^n \times Y^n \times \mathbf{R}_+^*$. Для каждой точки $z = ((x_i), (y_i), r) \in S$ обозначим через U_z открытое множество в $\mathscr{C}_s(X; Y)$, образованное теми непрерывными отображениями $f\colon X \longrightarrow Y$, для которых $d(f(x_i), y_i) < r$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Показать, что если D — всюду плотное подмножество в S, то $\bigcup_{z \in S} U_z = \bigcup_{z \in D} U_z$.

б) Вывести из а), что если топологии пространств X и Y обладают счетным базисом, то всякое подпространство пространства $\mathscr{C}_s(X; Y)$ является линделефовым (гл. IX, § 4, упражнение 23) и, значит, паракомпактным (там же).

7) Пусть X — пространство, содержащее плотное счетное подмножество, Y — отделимое пространство, каждая точка которого обладает счетной фундаментальной системой окрестностей (соотв. метризуемое пространство), и $H \subset \mathscr{C}(X; Y)$. Показать, что если $\mathscr{T}$ — топология в H, мажорирующая топологию простой сходимости на X, в которой H компактно, то всякая точка из H обладает счетной фундаментальной системой окрестностей в топологии $\mathscr{T}$ (соотв. $\mathscr{T}$ метризуема). [Заметить, что для всякого всюду плотного множества D в X топология $\mathscr{T}$ мажорирует топологию простой сходимости на D и что эта последняя отделима.]

8) а) Пусть f — непрерывное отображение $(x, y) \longmapsto xy$ произведения $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$. Показать, что отображение $x \longmapsto f(x, \cdot)$ пространства $\mathbf{R}$ в $\mathscr{C}_u(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ не непрерывно.

б) Пусть X и Y — топологические пространства, Z — равномерное пространство и f — отображение $X \times Y$ в Z; показать, что если $f(x, \cdot)$ для каждого $x \in X$ непрерывно на Y и отображение $x \longmapsto f(x, \cdot)$ пространства X в $\mathscr{C}_u(Y; Z)$ непрерывно, то f непрерывно на $X \times Y$.

*9) а) Пусть X, Y и Z — топологические пространства; предположим, что X и Y отделимы и всякая точка каждого из этих пространств обладает счетной фундаментальной системой окрестностей. Пусть f — такое отображение $X \times Y$ в Z, что $f(x, \cdot)$ для каждого $x \in X$ непрерывно на Y, а отображение $x \longmapsto f(x, \cdot)$ пространства X в $\mathscr{C}_c(Y; Z)$ непрерывно. Показать, что f непрерывно на $X \times Y$. [См. следствие 3 теоремы 2 § 1.]

б) Показать, что утверждение пункта а) остается в силе, если предположение об X заменить предположениями, что X локально компактно, а Z — равномерное пространство. [Использовать упражнение 2 § 2 и теорему Асколи.] (Ср. упражнение 11б).)

*10) Пусть X и Y — топологические пространства и $\boldsymbol{T}(A, B)$ для всех $A \subset X$ и $B \subset X$ означает множество тех отображений $u \in \mathscr{C}(X; Y)$, для которых $u(A) \subset B$.

Пусть $\mathfrak{U} = (U_\alpha)$ — открытое покрытие пространства X. Обозначим через $\mathscr{T}_\mathfrak{U}$ топологию в $\mathscr{C}(X; Y)$, порождаемую множествами $\boldsymbol{T}(F, V)$, где V пробегает все открытые подмножества из Y, а F — все замкнутые подмножества из X, содержащиеся хотя бы в одном U_α.

а) Показать, что $\mathscr{T}_\mathfrak{U}$ мажорирует топологию компактной сходимости. [Использовать теорему 3 § 4 главы IX.] Если X регулярно, то отображение $(u, x) \longmapsto u(x)$ произведения $\mathscr{C}(X; Y) \times X$ в Y непрерывно при наделении $\mathscr{C}(X; Y)$ топологией $\mathscr{T}_\mathfrak{U}$.

б) Пусть $\mathscr{T}$ — такая топология в $\mathscr{C}(X; Y)$, что отображение $(u, x) \longmapsto u(x)$ произведения $\mathscr{C}(X; Y) \times X$ в Y непрерывно, когда $\mathscr{C}(X; Y)$ наделено топологией $\mathscr{T}$. Пусть u_0 — непрерывное отображение X в Y, x_0 — точка из X и V — открытое множество в Y такое, что $u_0(x_0) \in V$. Показать, что существует открытая окрестность U точки x_0 в X такая, что $\boldsymbol{T}(U, V)$ является окрестностью u_0 в топологии $\mathscr{T}$.

в) Предположим, что X вполне регулярно. Показать, что если среди топологий $\mathscr{T}$ в $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, при которых $(u, x) \longmapsto u(x)$ непрерывно, существует слабейшая $\mathscr{T}_0$, то $\mathscr{T}_0$ необходимо есть топология компактной сходимости. [Пусть $\boldsymbol{T}(U, V)$ — окрестность нуля в $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, наделенном топологией $\mathscr{T}_0$, (W_α) — произвольное открытое покрытие множества $\overline{U}$ и $\mathfrak{W}$ — покрытие X, образованное всеми множествами W_α и $\mathbf{C}\overline{U}$. Используя а) и рассуждая от противного, показать, что существует конечное число множеств W_α, покрывающее $\overline{U}$.]

г) Показать, что если X вполне регулярно, но не локально компактно, то отображение $(u, x) \longmapsto u(x)$ произведения $\mathscr{C}_c(X; \mathbf{R}) \times X$

в R не непрерывно ни в одной точке. [Рассмотреть точку x_0, не имеющую ни одной компактной окрестности; рассуждать от противного, используя б).]

*11) Пусть X и Y — непустые топологические пространства, произведение которых $X \times Y$ нормально, и $\mathscr{T}$ — такая топология в множестве $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, что для всякой непрерывной числовой функции f на $X \times Y$ отображение $y \longmapsto f(\cdot, y)$ пространства Y в $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ непрерывно.

а) Пусть y_0 — предел некоторой последовательности (z_n) точек из Y, отличных от y_0, A — счетно-бесконечное замкнутое множество в X, все точки которого изолированные, и I — ограниченный открытый интервал в R. Показать, что в топологии $\mathscr{T}$ множество $\boldsymbol{T}(A, I)$ (упражнение 10) не имеет ни одной внутренней точки. [Для точки $u_0 \in \boldsymbol{T}(A, I)$ построить такое непрерывное отображение $f\colon X \times Y \longrightarrow \mathbf{R}$, что $f(\cdot, y_0) = u_0$, а $f(\cdot, z_n) \notin \boldsymbol{T}(A, I)$ для каждого n.]

б) Вывести отсюда, что если, кроме того, отображение $(u, x) \longmapsto u(x)$ произведения $\mathscr{C}(X; \mathbf{R}) \times X$ в R при наделении $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ топологией $\mathscr{T}$ непрерывно, X — локально паракомпактно (гл. IX, § 4, упражнение 27) и в X существует последовательность точек (x_n), сходящаяся к точке, отличной от всех x_n, то X необходимо локально компактно. [Использовать упражнение 10б), а также упражнение 25 в) § 4 главы IX.]

в) Заключить из б), что если X метризуемо и не локально компактно, то в $\mathscr{C}_c(X; \mathbf{R})$ имеются точки, не обладающие счетной фундаментальной системой окрестностей. [Использовать упражнение 9а).] Дать прямое доказательство этого факта, используя упражнение 5а).

12) Пусть X — топологическое пространство, Y и Z — равномерные пространства, $\mathfrak{S}$ — некоторое множество подмножеств из X, $\mathfrak{T}$ — некоторое множество подмножеств из Y.

а) Пусть $u_0 \in \mathscr{C}(X; Y)$. Показать, что если $u_0(A)$ для каждого $A \in \mathfrak{S}$ содержится в каком-нибудь $B \in \mathfrak{T}$, то отображение $v \longmapsto v \circ u_0$ пространства $\mathscr{C}_{\mathfrak{T}}(Y; Z)$ в $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X; Z)$ непрерывно.

б) Пусть H — подпространство в $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$ и $v_0 \in \mathscr{C}(Y; Z)$. Показать, что если v_0 равномерно непрерывно на $H(A)$ для каждого $A \in \mathfrak{S}$, то отображение $u \longmapsto v_0 \circ u$ пространства H в $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X; Z)$ непрерывно.

в) Пусть $u_0 \in \mathscr{C}(X; Y)$, $v_0 \in \mathscr{C}(Y; Z)$. Предположим, что для каждого $A \in \mathfrak{S}$ существуют $B \in \mathfrak{T}$ и окружение V для Y такие, что:

1° $V(u_0(A)) \subset B$; 2° v_0 равномерно непрерывно на B.

Тогда отображение $(u, v) \longmapsto v \circ u$ произведения $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X; Y) \times \mathscr{C}_{\mathfrak{T}}(Y; Z)$ в $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X; Z)$ непрерывно в точке (u_0, v_0).

В частности, отображение $(u, v) \longmapsto v \circ u$ произведения $\mathscr{C}(X; Y) \times \mathscr{C}_u(Y; Z)$ в $\mathscr{C}_u(X; Z)$ непрерывно во всякой точке (u_0, v_0) такой, что v_0 равномерно непрерывно на Y.

г) Пусть v_0 — гомеоморфизм $x \longmapsto x^3$ пространства $\mathbf{R}$ на себя. Показать, что отображение $u \longmapsto v_0 \circ u$ пространства $\mathscr{C}_u(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ в себя не непрерывно ни в одной точке.

*13) Пусть X, Y и Z — отделимые топологические пространства.

а) Показать, что, каковы бы ни были $u_0 \in \mathscr{C}(X; Y)$ и $v_0 \in \mathscr{C}(Y; Z)$, отображения $v \longmapsto v \circ u_0$ пространства $\mathscr{C}_c(Y; Z)$ в $\mathscr{C}_c(X; Z)$ и $u \longmapsto v_0 \circ u$ пространства $\mathscr{C}_c(X; Y)$ в $\mathscr{C}_c(X; Z)$ непрерывны.

б) Предположим, что всякая точка в Y (соотв. Z) обладает счетной фундаментальной системой окрестностей и что в X существует плотное счетное подмножество. Пусть H — компактное множество в $\mathscr{C}_c(X; Y)$; показать, что отображение $(u, v) \longmapsto v \circ u$ произведения $H \times \mathscr{C}_c(Y; Z)$ в $\mathscr{C}_c(X; Z)$ непрерывно. [Доказать сначала, используя упражнения 7 и 9а), что $H(K)$ компактно в Y для каждого компактного множества K из X.]

в) Показать, что отображение $(u, v) \longmapsto v \circ u$ произведения $\mathscr{C}_c(\mathbf{Q}; \mathbf{Q}) \times \mathscr{C}_c(\mathbf{Q}; \mathbf{Q})$ в $\mathscr{C}_c(\mathbf{Q}; \mathbf{Q})$ не непрерывно ни в одной точке.

14) Пусть Γ — группа всех гомеоморфизмов числовой плоскости $\mathbf{R}^2$ на себя, наделенная топологией *простой* сходимости. Показать, что отображение $(u, v) \longmapsto v \circ u$ произведения $\Gamma \times \Gamma$ в Γ не непрерывно. [С одной стороны, рассмотреть такую последовательность гомеоморфизмов (v_n), что всякая точка (x, y), где y не принадлежит интервалу $[1/(n+1), 1/n]$, является неподвижной для v_n, а сужением v_n на прямую $y = 2/(2n+1)$ служит параллельный перенос $(x, y) \longmapsto (x+1, y)$; с другой стороны, рассмотреть последовательность (u_n) параллельных переносов $(x, y) \longmapsto \left(x, y + \frac{2}{2n+1}\right)$.]

15) а) Пусть X — равномерное пространство, $\mathfrak{S}$ — некоторое множество его подмножеств, Γ — группа всех гомеоморфизмов X на себя и u_0 — элемент группы Γ. Предположим, что для каждого $A \in \mathfrak{S}$ существуют множество $B \in \mathfrak{S}$ и окружение V для X такие, что: $\alpha)$ u_0^{-1} равномерно непрерывно на $V(A)$; $\beta)$ если $u \in \Gamma$ и $(u_0(x), u(x)) \in V$ для всех $x \in B$, то $A \subset u(B)$. Показать, что при этих условиях отображение $u \longmapsto u^{-1}$ (определенное на Γ) непрерывно в точке u_0 при наделении Γ топологией $\mathfrak{S}$-сходимости.

б) Показать, что условие $\beta)$ можно заменить следующим: $\beta')$ существует связное множество $C \subset X$ такое, что $V(A) \subset C$, а $\overline{V}(C)$ содержится во внутренности множества $u_0(B)$. [Доказать, что $\beta')$ влечет $\beta)$, рассуждая от противного.]

*16) Пусть X — равномерное пространство и Γ_0 — группа *автоморфизмов* его равномерной структуры.

а) Показать, что в Γ_0 топология равномерной сходимости согласуется со структурой группы. [Использовать упражнения 12 и 15.] Кроме того, равномерная структура, индуцируемая в Γ_0 равномерной

структурой равномерной сходимости на X, совпадает с *правой* равномерной структурой топологической группы Γ_0.

б) Показать, что если X — компактный интервал $[0, 1]$ из $\mathbf{R}$, то топологическая группа Γ_0, определенная в а), не может быть полной. [Построить равномерно сходящуюся последовательность гомеоморфизмов (u_n) интервала X на себя, для которой последовательность (u_n^{-1}) не была бы равномерно сходящейся.]

в) Показать, что если X — полное отделимое равномерное пространство, то *двусторонняя* равномерная структура топологической группы Γ_0 (гл. III, § 3, упражнение 6) есть структура полного пространства. [Заметить, что если Φ — фильтр Коши в группе Γ_0, наделенной этой структурой, то $\Phi(x)$ и $\Phi^{-1}(x)$ сходятся в X при любом $x \in X$.]

*17) а) Показать, что если X — локально компактное локально связное пространство, то топология, индуцируемая в группе Γ всех гомеоморфизмов пространства X на себя топологией компактной сходимости, совпадает с топологией $\mathscr{T}_\beta$, определенной в n° 5. [Использовать упражнение 15б) и предложение 12.]

б) Пусть X — локально компактное подпространство в $\mathbf{R}$, состоящее из точки 0 и всех точек 2^n ($n \in \mathbf{Z}$), и Γ — группа всех гомеоморфизмов X на себя. Показать, что в Γ топология, индуцируемая топологией компактной сходимости, не согласуется со структурой группы.

18) Пусть X — локально компактное пространство, наделенное равномерной структурой, согласующейся с его топологией, и Γ — группа всех гомеоморфизмов X на себя. Пусть $\boldsymbol{G}(K, V)$ для каждого окружения V равномерной структуры пространства X и каждого компактного множества K в X означает множество всех пар (u, v) гомеоморфизмов X на себя таких, что $(u(x), v(x)) \in V$ и $(u^{-1}(x), v^{-1}(x)) \in V$ для всех $x \in K$.

а) Показать, что множества $\boldsymbol{G}(K, V)$ образуют фундаментальную систему окружений некоторой равномерной структуры $\mathscr{U}$ в Γ и что топология, порождаемая этой равномерной структурой, совпадает с топологией $\mathscr{T}_\beta$, определенной в n° 5.

б) Показать, что если X полно в рассмотренной равномерной структуре, то Γ полна в равномерной структуре $\mathscr{U}$.

в) Показать, что Γ полна в двусторонней равномерной структуре, порождаемой групповой топологией $\mathscr{T}_\beta$. [Использовать упражнение 16в).]

г) Возьмем в качестве X локально компактное подпространство в $\mathbf{R}$, образованное всеми точками вида $n \cdot 2^{-m}$ ($n \in \mathbf{Z}$, m — целое $\geqslant 1$). Показать, что в Γ ни структура $\mathscr{U}$, ни равномерная структура компактной сходимости не сравнима ни с одной из трех равномерных структур,— правой, левой или двусторонней,— порождаемых групповой топологией $\mathscr{T}_\beta$.

19) Пусть H — равностепенно непрерывная группа гомеоморфизмов равномерного пространства X на себя; наделенная топологией простой сходимости, H есть топологическая группа (следствие предложения 10).

а) Показать, что левая равномерная структура в H мажорирует равномерную структуру простой сходимости и что эти структуры совпадают, если H равномерно равностепенно непрерывно.

б) Пусть u — гомеоморфизм числовой прямой $\mathbf{R}$ на себя, определенный равенствами $u(x) = x + 1$ для $x \leqslant 0$ и $u(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$ для $x \geqslant 0$. Пусть H — порожденная им (в группе всех гомеоморфизмов прямой $\mathbf{R}$ на себя) моногенная группа. Показать, что H равностепенно непрерывна и дискретна в топологии простой сходимости, но равномерная структура простой сходимости в H отлична от дискретной равномерной структуры. [Заметить, что $u^{n+1}(x) - u^n(x)$ стремится к 0 при n стремящемся к $+\infty$.]

в) Возьмем в качестве равномерного пространства X дискретное пространство $\mathbf{N}$ всех целых чисел $\geqslant 0$, наделенное расстоянием, равным 1 для любой пары различных элементов, а в качестве H — группу всех изометрий $\mathbf{N}$ на себя, которая равномерно равностепенно непрерывна. Показать, что топологическая группа, получаемая наделением H топологией простой сходимости, не может быть полной. [Тот же метод, что и в упражнении 16б).]

г) Предположим, что X отделимо и полно, а H равномерно равностепенно непрерывна. Показать, что фильтры Коши в H, наделенном двусторонней равномерной структурой топологической группы H, сходится в пространстве $\mathscr{F}_s(X; X)$ и что множество H' их пределов является равномерно равностепенно непрерывной группой гомеоморфизмов пространства X на себя, которая (при наделении ее топологией простой сходимости) полна в своей двусторонней равномерной структуре и содержит H как плотную подгруппу.

20) Пусть X — локально компактное подпространство в $\mathbf{R}^2$, образованное прямыми $y = 0$ и $y = 1/n$ $(n \geqslant 1)$; G — группа гомеоморфизмов u пространства X на себя, сужение которых на каждую из прямых $y = 0$, $y = 1/n$ есть перенос вида $(x, y) \mapsto (x + a_n, y)$. Показать, что G удовлетворяет условиям теоремы 4, но топологии компактной и простой сходимости в G различны.

*21) Пусть X — локально компактное пространство, T — множество в $\mathscr{C}(X; X)$, состоящее из *сюръективных* отображений, и $\mathscr{T}$ — топология в T, мажорирующая топологию простой сходимости и такая, что T в топологии $\mathscr{T}$ *локально компактно*. Рассмотрим следующее свойство пары $(T, \mathscr{T})$:

(A) Если $u \in T$ и $v \in T$, то $u \circ v \in T$; кроме того, для каждого $u \in T$ отображения $v \mapsto u \circ v$ и $v \mapsto v \circ u$ множества T, наделенного топологией $\mathscr{T}$, в себя *непрерывны*.

а) Предположим, что X *компактно* и *метризуемо*, что $(T, \mathscr{T})$ удовлетворяет условию (А) и что существует группа G гомеоморфизмов X на себя, *плотная в* T, наделенном топологией $\mathscr{T}$. Показать, что множество H всех *биективных* отображений $u \in T$ имеет в T *тощее* дополнение. [Заметить прежде всего, основываясь на упражнении 7, что каждая точка из T обладает в $\mathscr{T}$ компактной и метризуемой окрестностью. Пусть (V_n) — фундаментальная система окрестностей в T нейтрального элемента e группы G и H_n — множество тех $v \in T$, для которых существует $u \in T$ такое, что $v \circ u \in V_n$; заметить, что H содержит пересечение всех H_n.]

б) Показать, что в предположениях пункта а) сужение на $G \times X$ отображения π: $(u, x) \mapsto u(x)$ произведения $T \times X$ в X *непрерывно*. [Показать сначала, что достаточно доказать, что для каждого $x_0 \in X$ существует $u_0 \in H$ такое, что π непрерывно в точке (u_0, x_0), установив, что это влечет непрерывность π в точке (e, x_0). Доказать затем, используя а) и упражнение 23 § 5 главы IX, что если V — метризуемая компактная окрестность элемента e в T, то существует такое $u_0 \in H \cap V$, что π непрерывно в точке (u_0, x_0).]

*22) Пусть X — *компактное* пространство, T — *подгруппа* группы его гомеоморфизмов на себя, наделенная локально компактной топологией $\mathscr{T}$, для которой выполнено условие (Λ) упражнения 21. Пусть G — *счетная* подгруппа группы T и f — непрерывная числовая функция на X. Рассмотрим непрерывное отображение $x \mapsto \varphi(x)$ пространства X в I^G, где $I = f(X) \subset \mathbf{R}$ и $\varphi(x) = (f(u(x)))_{u \in G}$; образ Y пространства X при отображении φ есть метризуемое компактное подпространство в I^G.

а) Показать, что множество тех $v \in T$, для которых $\varphi \circ v = \varphi$, есть подгруппа K группы T, нормализатор которой в T содержит G. Пусть R — отношение эквивалентности $u \circ v^{-1} \in K$ в T, T' — факторпространство T/R и p — каноническое отображение $T \mapsto T/R$. Показать, что T' локально компактно и если положить $p(u)\, v = p(u \circ v)$, то T действует справа в T' так, что $t' \mapsto t'v$ непрерывно на T' для каждого $v \in T$.

б) Пусть $G' = p(G)$, H' — замыкание G' в T' и $H = p^{-1}(H')$. Показать, что для $u \in H$ отношение $p(v) = p(v')$ влечет $p(u \circ v) = p(u \circ v')$, так что H действует слева в T'; кроме того, если для $u \in H$ и $v \in T$ положить $up(v) = p(u \circ v)$, то отображение $t' \mapsto ut'$ непрерывно на T'. Пусть, наконец, u_1 и u_2 — элементы из H, для которых $p(u_1) = p(u_2)$; тогда $u_1 t' = u_2 t'$, что определяет посредством факторизации отображение $(u', t') \mapsto u't'$ произведения $H' \times T'$ в T' такое, что $t' \mapsto u't'$ непрерывно на T' при любом $u' \in H'$. Показать, что если u' и v' принадлежат H', то $u'v' \in H'$, и так определенный

закон композиции в H' индуцирует в G' структуру группы (изоморфную структуре факторгруппы GK/K).

в) Если $u \in H$, то отношение $\varphi(x) = \varphi(y)$ влечет $\varphi(u(x)) = \varphi(u(y))$, так что существует, и притом единственное, отображение $\widetilde{u}$ пространства Y в себя такое, что $\varphi \circ u = \widetilde{u} \circ \varphi$. Показать, что $\widetilde{u}$ непрерывно и сюръективно; кроме того, для того чтобы $\widetilde{u}_1 = \widetilde{u}_2$, необходимо и достаточно, чтобы $p(u_1) = p(u_2)$; это позволяет написать $\widetilde{u} = \widetilde{u}'$, полагая $p(u) = u'$, и определяет инъективное отображение ψ: $u' \mapsto \widetilde{u}'$ пространства H' в $\mathscr{C}_s(Y; Y)$. Показать, что ψ непрерывно, и $\psi(u'v') = \psi(u') \circ \psi(v')$; отождествляя H' с его образом в $\mathscr{C}_s(Y; Y)$ при отображении ψ и обозначая через $\mathscr{T}'$ топологию, получаемую переносом с помощью ψ топологии, индуцированной в H' из T' заключить отсюда, что $(H', \mathscr{T}')$ удовлетворяет условию (А) упражнения 21.

г) Показать, что если G наделена топологией, индуцируемой топологией $\mathscr{T}$, то отображение $(u, x) \mapsto u(x)$ произведения $G \times X$ в X непрерывно. [Доказать, используя в) и упражнение 21, что для каждой непрерывной числовой функции f на X отображение $(u, x) \mapsto f(u(x))$ непрерывно на $G \times X$; затем применить предложение 4 § 1 главы IX.]

*23) Пусть X — компактное пространство, T — множество в $\mathscr{C}(X; X)$, устойчивое относительно закона $(u, v) \mapsto u \circ v$. Предположим, что T наделено локально компактной топологией $\mathscr{T}$, мажорирующей топологию простой сходимости, причем для каждого *счетного* множества $S \subset T$, устойчивого относительно $u \circ v$, сужение на $S \times X$ отображения π: $(u, x) \mapsto u(x)$ произведения $T \times X$ в X непрерывно. Показать, что при этих условиях π непрерывно на $T \times X$. [Пусть V — компактное множество в T, наделенном топологией $\mathscr{T}$; показать, используя следствие 1 теоремы 3, что для всякого счетного подмножества D множества V каждая точка прикосновения множества D в топологии $\mathscr{T}$ является также точкой прикосновения этого множества в топологии равномерной сходимости. Заключить отсюда, что V относительно компактно в $\mathscr{C}_u(X; X)$ (гл. II, 2-е изд., § 4, упражнение 2; 3-е изд., § 4, упражнение 6) и, значит, равностепенно непрерывно.]

24) Пусть X — локально компактное пространство, T — некоторая группа гомеоморфизмов X на себя и $\mathscr{T}$ — локально компактная топология в T, мажорирующая топологию простой сходимости и такая, что выполняется свойство (А) из упражнения 21. Показать, что отображение $(u, x) \mapsto u(x)$ произведения $T \times X$ в X непрерывно при наделении T топологией $\mathscr{T}$. [Продолжить гомеоморфизмы из T до гомеоморфизмов александровской компактификации X' пространства X; затем, используя упражнение 22г), показать применимость результата упражнения 23.]

*25) Пусть G — группа, наделенная топологией $\mathcal{T}$, в которой G локально компактна, а сдвиги $t \mapsto st$ и $t \mapsto ts$ для каждого $s \in G$ непрерывны. Показать, что $\mathcal{T}$ согласуется со структурой группы в G («*теорема Р. Эллиса*»). [Отождествить G с группой левых сдвигов, наделенной топологией простой сходимости, так что G отождествится с группой гомеоморфизмов ее александровской компактификации X, наделенной топологией простой сходимости. Вывести отсюда с помощью упражнения 24, что в G топология простой сходимости на X совпадает с топологией равномерной сходимости на X (следствие 1 теоремы 3), и в заключение применить предложение 11.]

*26) а) Пусть X — локально компактное равномерное пространство, G — некоторая группа его гомеоморфизмов и T — замыкание G в $\mathscr{C}_s(X; X)$. Показать, что для того, чтобы T было компактно в топологии простой сходимости и было группой гомеоморфизмов, необходимо и достаточно, чтобы G была относительно компактна в $\mathscr{C}_s(X; X)$. [Использовать упражнения 12 и 24, а также следствие теоремы 4.]

б) Пусть G — локально компактная, но не компактная топологическая группа и X — ее александровская компактификация; отождествим G с некоторой группой гомеоморфизмов пространства X. Показать, что G не равностепенно непрерывна, хотя ее замыкание в $\mathscr{C}_s(X; X)$ и компактно.

27) Пусть X — отделимое равномерное пространство и G — равностепенно непрерывная группа его гомеоморфизмов.

а) Точка $x_0 \in X$ называется *почти периодической* относительно G, если ее орбита по G относительно компактна в X. Пусть Y — (компактное) замыкание в X этой орбиты и $u(Y) \subset Y$ для всех $u \in G$. Пусть $\widetilde{u}$ сужение u на Y, рассматриваемое как элемент $\mathscr{C}(Y; Y)$; показать, что $\widetilde{u}$ есть гомеоморфизм Y на себя и что замыкание Γ в $\mathscr{C}_u(Y; Y)$ образа группы G при отображении $u \mapsto \widetilde{u}$ является компактной группой гомеоморфизмов (следствие теоремы 4), транзитивной в Y.]

б) Предположим, что X полно; для того чтобы точка x_0 была почти периодической относительно G, необходимо и достаточно, чтобы для каждой ее окрестности V в X существовало конечное число элементов $u_i \in G$ таких, что, каково бы ни было $u \in G$, $u_i^{-1}(u(x_0)) \in V$ хотя бы для одного i.

в) Предположим, что x_0 — почти периодическая точка и G наделена топологией, согласующейся с ее структурой группы; сохраним обозначения пункта а). Для того чтобы отображение $u \mapsto \widetilde{u}$ группы G в Γ (наделенное топологией равномерной сходимости) было непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы для каждой пары различных точек x, y из Y существовали окрестность U нейтрального элемента e группы G и окрестность V точки y, для которых $u \in U$ влечет $u(x) \notin V$. [Использовать то, что в Γ топологии, индуцируемые из $\mathscr{C}_u(Y; Y)$ и $\mathscr{C}_s(Y; Y)$, совпадают.]

28) Пусть G — топологическая группа и X — банахово пространство всех ограниченных непрерывных отображений G в $\mathbf{C}$, наделенное нормой $\| f \| = \sup_{s \in G} | f(s) |$. Для каждой функции $f \in X$ и каждого $s \in G$ обозначим через $U_s f$ функцию $t \mapsto f(s^{-1}t)$, также принадлежащую X, так что U_s, где s пробегает G, образуют группу G' изометрий пространства X. Элемент $f \in X$ называется *почти периодической* (слева) *функцией* на G, если f — почти периодический элемент в X относительно группы G'. Для этого необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало конечное число элементов $s_i \subset G$ таких, что, каково бы ни было $s \in G$, существовал хотя бы один индекс i, для которого

$$| f(s^{-1}t) - f(s_i^{-1}t) | \leqslant \varepsilon$$

при всех $t \subset G$.

а) Предположим, что f — почти периодическая функция. Пусть Y — замыкание в X орбиты f по G', а Γ — замыкание в $\mathscr{C}_u(Y; Y)$ множества сужений V_s на Y отображений U_s, где s пробегает G. Пусть $f_\sigma \in Y$ для каждого $\sigma \subset \Gamma$ означает образ f при отображении σ;

$$f_\sigma(t) = U_s^{-1} f_\sigma(s^{-1}t)$$

для каждого $s \subset G$; вывести отсюда существование на Γ такой непрерывной функции $\overline{f}$, что

$$f(s) = \overline{f}(V_s).$$

[Использовать упражнение 27в).]

б) Используя а), показать, что для того, чтобы функция $f \in X$ была почти периодической относительно G, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид $g \circ \varphi$, где φ — каноническое отображение группы G в *компактную группу* G^c, *ассоциированную с* G (Теор. множ., гл. IV, § 3, n° 3, пример 8), а g — непрерывное отображение G^c в $\mathbf{C}$.

в) Возьмем в качестве G аддитивную группу $\mathbf{R}$. Показать, что если f — почти периодическая функция на $\mathbf{R}$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $T > 0$, что всякий интервал из $\mathbf{R}$ длины T содержит s, для которого $| f(s + x) - f(x) | \leqslant \varepsilon$, каково бы ни было $x \in \mathbf{R}$ (s называют «почти-периодом с точностью до ε» функции f). [Использовать б) и доказательство упражнения 2 § 1 главы V.]

29) Пусть X — компактное пространство, а G — топологическая группа, действующая непрерывно в X и такая, что всякая орбита для G плотна в X. Показать, что если для каждой непрерывной числовой функции f на X существует $x_0 \in X$ такое, что $s \mapsto f(sx_0)$ есть почти периодическая функция на G, то G равностепенно непрерывна. [Использовать то, что X гомеоморфно замкнутому подпространству некоторого куба.] Доказать обратное при дополнительном предположении, что G коммутативна.

§ 4. Аппроксимация непрерывных числовых функций

1. *Аппроксимация непрерывных функций функциями из некоторой решетки*

В этом параграфе мы будем изучать множество $\mathscr{C} = \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ всех непрерывных числовых функций *), определенных на некотором *компактном* пространстве X; это множество будет всюду предполагаться наделенным топологией *равномерной сходимости*; как мы знаем (§ 3, n° 2), эта топология определяется нормой $\| f \| = \sup_{x \in X} | f(x) |$, согласующейся со структурой алгебры в $\mathscr{C}$ над полем $\mathbf{R}$; наделенное этой структурой алгебры и этой нормой, $\mathscr{C}$ является *полной нормированной алгеброй* над полем $\mathbf{R}$ (§ 1, следствие 1 теоремы 2).

Будем говорить, что непрерывная числовая функция f на X *равномерно аппроксимируема* функциями из заданного множества $H \subset \mathscr{C}$, если f — *точка прикосновения* множества H в пространстве $\mathscr{C}$, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует функция $g \in H$ такая, что $| f(x) - g(x) | \leqslant \varepsilon$ для *всех* $x \in X$. Утверждение, что *каждая* непрерывная числовая функция на X равномерно аппроксимируема функциями из H, означает, таким образом, что H *всюду плотно* в $\mathscr{C}$.

Как известно, в множестве $\mathscr{C}$ отношение $f \leqslant g$ (равносильное «$f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in X$») есть отношение порядка, относительно которого $\mathscr{C}$ является *решеткой*. Очевидно, $\| \, | u | - | v | \, \| \leqslant \| u - v \|$, так что $u \mapsto | u |$ есть *равномерно непрерывное* отображение $\mathscr{C}$ в себя; отсюда следует, что и отображения

$$(u, v) \mapsto \sup(u, v) = \frac{1}{2}(u + v + | u - v |)$$

и

$$(u, v) \mapsto \inf(u, v) = \frac{1}{2}(u + v - | u - v |)$$

равномерно непрерывны на $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$.

Предложение 1. *Пусть X — компактное пространство, H — некоторое множество непрерывных числовых функций, опре-*

*) Числовые функции, рассматриваемые в этом параграфе, будут всюду предполагаться *конечными*.

деленных на X, и f — непрерывная числовая функция на X, обладающая тем свойством, что для каждого $x \in X$ существует функция $u_x \in H$ такая, что $u_x(x) > f(x)$ (соотв. $u_x(x) < f(x)$). Тогда существует конечное число функций $u_{x_i} = f_i \in H$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ таких, что если положить $v = \sup(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ (соотв. $w = \inf(f_1, f_2, \ldots, f_n)$), то для всех $x \in X$ выполняется неравенство $v(x) > f(x)$ (соотв. $w(x) < f(x)$).

Действительно, пусть G_x, для каждого $x \in X$, означает открытое множество тех $z \in X$, для которых $u_x(z) > f(z)$ (соотв. $u_x(z) < f(z)$); так как, по предположению, $x \in G_x$, то X является объединением всех G_x $(x \in X)$. Так как X компактно, то тогда существует конечное число точек x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ таких, что множества G_{x_i} покрывают X; ясно, что функции $f_i = u_{x_i}$ отвечают поставленному требованию.

Теорема 1 (Дини). *Пусть X — компактное пространство и H — множество непрерывных числовых функций на X, фильтрующееся по отношению* $\leqslant$ (соотв. $\geqslant$). *Если верхняя* (соотв. *нижняя*) *огибающая f множества H конечна и непрерывна на X, то f равномерно аппроксимируема функциями из H* (или, что то же, *фильтр сечений множества H равномерно сходится к f на X*).

Действительно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для каждого $x \in X$ существует функция $u_x \in H$, такая, что $u_x(x) > f(x) - \varepsilon$. На основании предложения 1 и поскольку H фильтруется по отношению $\leqslant$, существует $g \in H$, такое, что $g(x) > f(x) - \varepsilon$ для всех $x \in X$; так как с другой стороны, по определению $g(x) \leqslant f(x)$, то теорема доказана.

Следствие. *Пусть (u_n) — возрастающая* (соотв. *убывающая*) *последовательность непрерывных числовых функций на X. Если верхняя* (соотв. *нижняя*) *огибающая f последовательности (u_n) конечна и непрерывна на X, то последовательность (u_n) равномерно сходится к f на X.*

Ясно, что утверждение теоремы 1 уже не обязательно верно, если не предполагать X компактным, как это показывает пример убывающей последовательности функций $x/(n+x)$ на $\mathbf{R}_+$.

Предложение 2. *Пусть X — компактное пространство и H — множество непрерывных числовых функций на X такое, что*

вместе с каждыми двумя функциями $u \in H$ *и* $v \in H$ *также функции* $\sup(u, v)$ *и* $\inf(u, v)$ *принадлежат* H. *Для того чтобы непрерывная числовая функция* f *на* X *была равномерно аппроксимируема функциями из* H, *необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $\varepsilon > 0$ *и каждой пары* (x, y) *точек из* X *существовала функция* $u_{x,y} \in H$ *такая, что* $|f(x) - u_{x,y}(x)| < \varepsilon$ *и* $|f(y) - u_{x,y}(y)| < \varepsilon$.

Необходимость условия очевидна. Докажем, что оно достаточно. Мы покажем, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такая функция $g \in H$, что $|f(z) - g(z)| < \varepsilon$ для всех $z \in X$. Пусть x — произвольная точка из X и H_x — множество всех функций $u \in H$, для которых $u(x) < f(x) + \varepsilon$. По предположению, для каждого $y \in X$ функция $u_{x,y}$ принадлежит H_x, причем $u_{x,y}(y) > f(y) - \varepsilon$; поэтому, согласно предложению 1, существует конечное число функций из H_x, верхняя огибающая которых v_x такова, что $v_x(z) > f(z) - \varepsilon$ для всех $z \in X$; с другой стороны, по определению множества H_x, $v_x(x) < f(x) + \varepsilon$; наконец, v_x принадлежит H в силу предположения. Предложение 1 показывает тогда, что существует конечное число функций v_{x_i}, нижняя огибающая которых g такова, что $g(z) < f(z) + \varepsilon$ для всех $z \in X$; с другой стороны, поскольку $v_{x_i}(z) > f(z) - \varepsilon$ для всех $z \in X$ и каждого индекса i, то также $g(z) > f(z) - \varepsilon$ для всех $z \in X$; так как в силу предположения $g \in H$, то предложение доказано.

Замечание. Множество H, удовлетворяющее указанным условиям, является *решеткой* по отношению порядка $f \leqslant g$. Заметим, однако, что множество $H \subset \mathscr{C}$ может быть решеткой по этому отношению порядка и без того, чтобы верхняя (соотв. нижняя) грань в H двух функций u, v из H совпадала с их верхней (соотв. нижней) гранью в $\mathscr{C}$, т. е. с функцией

$$x \longmapsto \sup(u(x), v(x)) \text{ (соотв. } x \longmapsto \inf(u(x), v(x))).$$

° Пример доставляют *выпуклые* отображения компактного интервала числовой прямой $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$ (см. Функции действ. пер., гл. I, § 4, упражнение 20).„

Следствие. *Предположим, что* H *таково, что вместе со всякими двумя его функциями* u *и* v *также функции* $\sup(u, v)$ *и* $\inf(u, v)$ *принадлежат* H *и, кроме того, для каждой пары различных точек* x, y *из* X *и каждой пары вещественных чисел* α, β

существует такая функция $g \in H$, *что* $g(x) = \alpha$ *и* $g(y) = \beta$. *Тогда всякая непрерывная числовая функция на* X *равномерно аппроксимируема функциями из* H.

Определение 1. *Говорят, что множество* H *отображений множества* X *в множество* Y *отделяет элементы множества* $A \subset X$ (или является *отделяющим множеством* для элементов множества A), *если для всяких двух различных элементов* x, y *из* A *существует функция* $f \in H$, *для которой* $f(x) \neq f(y)$.

Например, если X — *вполне регулярное* пространство (гл. IX, § 1, n° 5), то множество всех непрерывных отображений X в $[0, 1]$ отделяет точки этого пространства.

Теорема 2. (Стоун). *Пусть* X — *компактное пространство и* H — *такое векторное подпространство в* $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, *что*: 1° *постоянные функции принадлежат* H; 2° $u \in H$ *влечет* $|u| \in H$; 3° H *отделяет точки пространства* X. *При этих условиях всякая непрерывная числовая функция на* X *равномерно аппроксимируема функциями из* H.

Достаточно показать, что H удовлетворяет условиям следствия предложения 2. По предположению, если $u \in H$ и $v \in H$, то также

$$\sup(u, v) = \frac{1}{2}(u + v + |u - v|) \quad \text{и} \quad \inf(u, v) = \frac{1}{2}(u + v - |u - v|)$$

принадлежат H. С другой стороны, пусть x, y — произвольные две различные точки из X и α, β— любые два вещественных числа; по предположению, существует функция $h \in H$, для которой $h(x) \neq h(y)$; положим $h(x) = \gamma$, $h(y) = \delta$; поскольку постоянные принадлежат H, функция $g(z) = \alpha + (\beta - \alpha)\frac{h(z) - \gamma}{\delta - \gamma}$ принадлежит H, а для нее $g(x) = \alpha$ и $g(y) = \beta$.

2. *Аппроксимация непрерывных функций полиномами*

Пусть дано множество H числовых функций, определенных на некотором множестве X; будем говорить, что числовая функция на X есть *полином* (соотв. *полином без постоянного члена*) *с вещественными коэффициентами относительно функций из* H, если она имеет вид

$$x \mapsto g(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)),$$

где g — полином (соотв. полином без постоянного члена) с вещественными коэффициентами относительно n неизвестных (где n произвольно), а функции f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ принадлежат H.

Теорема 3 (Вейерштрасс — Стоун). *Пусть X — компактное пространство и H — множество непрерывных числовых функций на X, отделяющее его точки. Тогда всякая непрерывная числовая функция на X равномерно аппроксимируема полиномами (с вещественными коэффициентами) относительно функций из H.*

Другими словами, *подалгебра алгебры $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, содержащая постоянные функции и отделяющая точки пространства X, всюду плотна в $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$.*

Пусть H_0 — множество всех полиномов относительно функций из H и $\overline{H}_0$ его замыкание в $\mathscr{C}$; для всякого полинома g от n переменных с вещественными коэффициентами $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \mapsto g(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ есть непрерывное отображение $\mathscr{C}^n$ в $\mathscr{C}$, переводящее H_0^n в H_0; тем самым оно отображает $\overline{H}_0^n$ в $\overline{H}_0$ (гл. I, 2-е изд., § 4, теорема 2; 3-е изд., § 2, теорема 1). В частности, $\overline{H}_0$ является векторным подпространством в $\mathscr{C}$ и, очевидно, удовлетворяет первому и третьему условиям теоремы 2; покажем, что оно удовлетворяет и второму условию, откуда будет следовать, что $\overline{H}_0 = \mathscr{C}$. Поскольку всякая функция $u \in \overline{H}_0$ ограниченна на X, достаточно доказать следующую лемму:

Лемма 1. *Для каждого числа $\varepsilon > 0$ и каждого компактного интервала $I \subset \mathbf{R}$ существует полином $p(t)$ без постоянного члена такой, что $|p(t) - |t|| \leqslant \varepsilon$ для всех $t \in I$.*

Достаточно установить справедливость леммы для интервала вида $I = [-a, +a]$, а следовательно, заменяя t на at, для интервала $[-1, +1]$. Поскольку $|t| = \sqrt{t^2}$, лемма 1 является следствием следующего результата:

Лемма 2. *Пусть (p_n) — последовательность полиномов без постоянного члена, определенная индукцией по n условиям $p_0(t) = 0$ и*

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}(t - (p_n(t))^2) \tag{1}$$

для $n \geqslant 0$; на интервале $[0, 1]$ последовательность (p_n) возрастает и равномерно сходится к $\sqrt{t}$.

Достаточно доказать, что для каждого $t \in [0, 1]$ выполняются неравенства

$$0 \leqslant \sqrt{t} - p_n(t) \leqslant \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}}, \tag{2}$$

поскольку (2) влечет $0 \leqslant \sqrt{t} - p_n(t) \leqslant 2/n$.

Неравенство (2) справедливо при $n = 0$; применим индукцию по n; из предположения индукции (2) вытекает, что $0 \leqslant \sqrt{t} - p_n(t) \leqslant \sqrt{t}$, откуда $0 \leqslant p_n(t) \leqslant \sqrt{t}$. На основании (1) получаем тогда:

$$\sqrt{t} - p_{n+1}(t) = (\sqrt{t} - p_n(t))\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t))\right),$$

откуда $\sqrt{t} - p_{n+1}(t) \geqslant 0$ и в силу (2)

$$\sqrt{t} - p_{n+1}(t) \leqslant \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}}\left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}}\left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2 + (n+1)\sqrt{t}}\right) = \frac{2\sqrt{t}}{2 + (n+1)\sqrt{t}},$$

что и требовалось доказать.

Без предположения, что X компактно, утверждение теоремы 3 уже не обязательно верно. Например, ограниченная непрерывная числовая функция на $\mathbf{R}$, отличная от постоянной, не может быть равномерно аппроксимирована на $\mathbf{R}$ полиномами (см. упражнение 6).

Предложение 3. *Пусть $(K_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство компактных интервалов в $\mathbf{R}$, $K = \prod_{\iota \in I} K_\iota$ — их произведение и X — компактное подпространство пространства K. Всякая непрерывная числовая функция на X может быть равномерно аппроксимирована полиномами относительно координат $x_\iota = \mathrm{pr}_\iota x$.*

В самом деле, для любых двух различных точек $x = (x_\iota)$ и $y = (y_\iota)$ из X существует такой индекс ι, что $x_\iota \neq y_\iota$; это показывает, что семейство непрерывных функций pr_ι удовлетворяет условиям теоремы 3.

Предложение 4. *Пусть X — компактное пространство, A — замкнутое множество в X и H — множество непрерывных числовых функций на X, отделяющее точки множества $\complement A$ и такое, что A есть пересечение множеств $u^{-1}(0)$, где u пробегает H. При этих условиях всякая непрерывная числовая функция на X, равная*

нулю на A, равномерно аппроксимируема полиномами без постоянного члена относительно функций из H.

Рассмотрим сначала тот частный случай, когда A сводится к одной точке x_0. Из предположения следует тогда, что H отделяет точки множества X, ибо если $x \neq x_0$, то по условию существует функция $u \in H$, для которой $u(x) \neq 0 = u(x_0)$; поэтому (теорема 3) для каждого $\varepsilon > 0$ и каждой непрерывной числовой функции f на X такой, что $f(x_0) = 0$, существует полином g относительно функций из H такой, что $|f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in X$; в частности, $|g(x_0)| \leqslant \varepsilon$, откуда $|f(x) - (g(x) - g(x_0))| \leqslant 2\varepsilon$ для всех $x \in X$; поскольку $g(x) - g(x_0)$ есть полином без постоянного члена относительно функций из H, предложение для этого частного случая доказано.

В общем случае рассмотрим в X отношение эквивалентности R, классами которого служат множество A и множества $\{x\}$, где x пробегает $\complement A$; факторпространство $X' = X/R$ отделимо (гл. I, 2-е изд., § 9, предложение 11; 3-е изд., § 8, предложение 15) и, следовательно, компактно. Пусть φ — каноническое отображение X на X/R; всякая непрерывная числовая функция на X, равная нулю на всем A, может быть записана в виде $f = f_1 \circ \varphi$, где f_1 — числовая функция, определенная и непрерывная на X' и равная нулю в точке $x'_0 = \varphi(A)$; применяя предложение к пространству X' и точке x'_0, получаем требуемый результат для общего случая.

3. Приложение: аппроксимация непрерывных числовых функций, определенных на произведении компактных пространств

Теорема 4. *Пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство компактных пространств, $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$ — его произведение. Всякая непрерывная числовая функция на X равномерно аппроксимируема суммами конечного числа функций вида $(x_\iota) \mapsto \prod_{\alpha \in J} u_\alpha(x_\alpha)$, где J — (произвольные) конечные подмножества множества I, а u_α — непрерывные числовые функции на X_α ($\alpha \in J$).*

Действительно, рассмотрим множество H всех непрерывных «функций одной переменной» $(x_\iota) \mapsto u_\alpha(x_\alpha)$ ($\alpha \in I$) на X; это множество отделяет точки пространства X, ибо для любых двух раз-

личных точек $x = (x_\iota)$ и $y = (y_\iota)$ из X существуют $\alpha \in I$ такое, что $x_\alpha \neq y_\alpha$, и непрерывная числовая функция h_α на X_α, для которой $h_\alpha(x_\alpha) \neq h_\alpha(y_\alpha)$; тогда функция $x \mapsto h_\alpha(\mathrm{pr}_\alpha x)$ принадлежит H и принимает различные значения в точках x и y. Поскольку всякий полином относительно функций из H имеет вид, указанный в условии теоремы, последняя вытекает из теоремы 3.

Без предположения *компактности* всех X_ι утверждение теоремы 4 уже не обязательно верно (см. упражнение 9).

4. *Аппроксимация непрерывных отображений компактного пространства в нормированное пространство*

Пусть X — компактное пространство и Y — нормированное векторное пространство над полем $\mathbf{R}$ (гл. IX, § 3); пространство $\mathscr{C}(X; Y)$ всегда будет предполагаться наделенным топологией равномерной сходимости, определяемой нормой $\| u \| = \sup_{x \in X} \| u(x) \|$ (§ 3, n° 2).

Пусть H — некоторое множество *непрерывных числовых функций*, определенных на X, $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — конечное семейство функций из H и $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — конечное семейство точек из Y. Тогда отображение $x \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i u_i(x)$ пространства X в Y непрерывно; мы будем обозначать его $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i$ и называть *линейной комбинацией* функций из H с коэффициентами из Y. Мы будем говорить также, что непрерывное отображение f пространства X в Y *равномерно аппроксимируемо* линейными комбинациями функций из H (с коэффициентами из Y), если f есть *точка прикосновения* векторного подпространства в $\mathscr{C}(X; Y)$, образованного всеми этими линейными комбинациями.

Предложение 5. *Пусть X — компактное пространство, Y — нормированное пространство над $\mathbf{R}$ и $H \subset \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$. Если всякая непрерывная числовая функция на X равномерно аппроксимируема функциями из H, то всякое непрерывное отображение f пространства X в Y равномерно аппроксимируемо линейными комбинациями* (с коэффициентами из Y) *функций из H.*

Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, каждая точка $x \in X$ обладает открытой окрестностью, в которой колебание f не превосходит ε. Следовательно, существует конечное открытое покрытие $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ пространства X такое, что колебание f в каждом из A_i не превосходит ε. Пусть a_i — любое значение f в A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — непрерывное разбиение единицы, подчиненное покрытию (A_i) (гл. IX, § 4, следствие предложения 4). Возьмем произвольную точку $x \in X$; тогда $u_i(x) = 0$ для всякого i такого, что $x \notin A_i$, и $\| f(x) - a_i \| \leqslant \varepsilon$ для всякого i такого, что $x \in A_i$; следовательно,

$$\Big\| f(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i u_i(x) \Big\| = \Big\| \sum_{i=1}^{n} (f(x) - a_i) u_i(x) \Big\| \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{n} u_i(x) = \varepsilon.$$

С другой стороны, согласно предположению, существует функция $v_i \in H$ такая, что $| u_i(x) - v_i(x) | \leqslant \varepsilon / \sum_{j=1}^{n} \| a_j \|$ для всех $x \in X$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; следовательно, $\Big\| f(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i v_i(x) \Big\| \leqslant 2\varepsilon$ для всех $x \in X$, и предложение доказано.

Таким образом, на основании предложения 5 каждому из доказанных выше предложений, в которых устанавливается, что некоторое множество H всюду плотно в $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, соответствует аналогичное предложение для непрерывных отображений X в произвольное нормированное пространство Y. Мы ограничимся формулировкой предложения, отвечающего указанным образом теореме 3. Пусть H — некоторое множество числовых функций, определенных на X; назовем *полиномом относительно функций из H с коэффициентами из Y* всякую линейную комбинацию с коэффициентами из Y произведений конечных (возможно пустых) семейств функций из H. Тогда

Предложение 6. *Пусть X — компактное пространство и H — множество непрерывных числовых функций на X, отделяющее его точки. При этих условиях всякое непрерывное отображение пространства X в нормированное пространство Y над $\mathbf{R}$ равномерно аппроксимируемо полиномами с коэффициентами из Y относительно функций из H.*

Отсюда вытекает также следующее предложение:

Предложение 7. *Пусть X — компактное пространство и H — множество его непрерывных отображений в поле комплексных чисел* $\mathbf{C}$, *отделяющее точки пространства X. Всякое непрерывное отображение пространства X в нормированное пространство Y над* $\mathbf{C}$ *равномерно аппроксимируемо полиномами с коэффициентами из Y относительно функций $f \in H$ и сопряженных функций $\bar{f}$.*

Достаточно заметить, что Y есть также нормированное пространство над $\mathbf{R}$, и применить предложение 6 к множеству, образованному вещественными и мнимыми частями функций $f \in H$, приняв во внимание, что $\mathscr{R}f = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ и $\mathscr{I}f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$.

Следствие 1. *Если X — компактное множество в пространстве* $\mathbf{C}^n$, *то всякое непрерывное отображение $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \mapsto f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ множества X в нормированное пространство Y над полем* $\mathbf{C}$ *равномерно аппроксимируемо полиномами относительно z_k и $\bar{z}_k$ с коэффициентами из Y.*

Мы увидим позже, что, вообще говоря, невозможно равномерно аппроксимировать f полиномами (с коэффициентами из Y) *относительно одних только переменных* z_k, даже если $Y = \mathbf{C}$.

Следствие 2. *Пусть X — локально компактное пространство и $\mathscr{C}_0(X)$ — нормированная алгебра над* $\mathbf{C}$ *всех непрерывных отображений X в* $\mathbf{C}$, *стремящихся к 0 на бесконечности. Пусть A — подалгебра алгебры $\mathscr{C}_0(X)$, отделяющая точки пространства X и такая, что $f \in A$ влечет $\bar{f} \in A$ и для каждого $x \in X$ существует $f \in A$, для которой $f(x) \neq 0$. Тогда A плотна в $\mathscr{C}_0(X)$.*

Пусть X' — компактное пространство, получаемое присоединением к X бесконечно удаленной точки ω; тогда $\mathscr{C}_0(X)$ отождествимо с подпространством в $\mathscr{C}(X'; \mathbf{C})$, образованным всеми непрерывными отображениями, равными нулю в точке ω, а норма на $\mathscr{C}_0(X)$ определяется равенствами $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| = \sup_{x \in X'} |f(x)|$. В силу предложения 7 всякая функция $f \in \mathscr{C}_0(X)$ равномерно аппроксимируема полиномами с комплексными коэффициентами относительно функций из A; при этом, поскольку

$f(\omega) = 0$, рассуждение, проведенное при доказательстве предложения 4, показывает, что эти полиномы можно предполагать без постоянного члена, и тогда они принадлежат A.

В качестве другого примера применения предложения 7 отметим следующий результат:

Предложение 8. *Пусть P — множество всех непрерывных периодических отображений $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{C}$, группа периодов которых содержит $\mathbf{Z}^m$. Всякая функция, принадлежащая P, равномерно аппроксимируема на $\mathbf{R}^m$ линейными комбинациями с комплексными коэффициентами функций вида*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mapsto e(h_1x_1 + h_2x_2 + \ldots + h_mx_m),$$

где все h_i — целые рациональные числа (эти комбинации называются *тригонометрическими полиномами от m переменных*).

Достаточно заметить, что P (наделенное топологией равномерной сходимости) канонически изоморфно пространству всех непрерывных отображений компактного пространства $\mathbf{T}^m$ в $\mathbf{C}$ (гл. VIII, § 1, n° 6), и применить предложение 7 к множеству отображений $\mathbf{T}^m$ в $\mathbf{C}$, соответствующих m отображениям

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mapsto e(x_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant m)$$

пространства $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{C}$.

Упражнения

1) Пусть X — линделефово пространство (гл. I, 2-е изд., § 10, упражнение 19; 3-е изд., § 9, упражнение 15) и H — некоторое множество непрерывных числовых функций на X, фильтрующееся по отношению $\geqslant$. Предположим, что нижняя огибающая g всех функций из H непрерывна. Показать, что существует убывающая последовательность (f_n) функций из H, просто сходящаяся к g.

2) Пусть I — компактный интервал в $\mathbf{R}$ и (f_n) — последовательность *монотонных* функций на I, просто сходящаяся на I к некоторой *непрерывной* функции g. Показать, что g монотонна и последовательность (f_n) сходится к g равномерно на I.

*3) Пусть Γ — просто транзитивная группа гомеоморфизмов пространства $\mathbf{R}$, наделенная топологией простой сходимости. Для каждого $x \in \mathbf{R}$ обозначим через s_x тот элемент группы Γ, для которого $s_x(0) = x$. Показать, что отображение $x \mapsto s_x$ есть гомеоморфизм $\mathbf{R}$ на Γ. [Воспользоваться тем, что если $s \in \Gamma$ таково, что $x < s(x)$ для некоторого $x \in \mathbf{R}$, то $y < s(y)$ для всех $y \in \mathbf{R}$.] Вывести отсюда, что Γ есть

топологическая группа, изоморфная $\mathbf{R}$. [Воспользоваться упражнением 10 § 1, упражнением 17а) § 3 и теоремой 1 § 3 главы V.]

4) Пусть X — компактное пространство и H — такое векторное подпространство в $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, что $u \in H$ влечет $|u| \in H$. Для того чтобы непрерывная числовая функция f на H была равномерно аппроксимируема функциями из H, необходимо и достаточно, чтобы для каждой пары (x, y) точек из X функция f удовлетворяла каждому линейному соотношению $\alpha f(x) = \beta f(y)$ такому, что $\alpha\beta \geqslant 0$ и $\alpha g(x) = \beta g(y)$ для всех функций $g \in H$. [Применить предложение 2, заметив, что образ H при отображении $u \longmapsto (u(x), u(y))$ есть либо вся плоскость $\mathbf{R}^2$, либо прямая $\alpha X = \beta Y$, где $\alpha\beta \geqslant 0$, либо, наконец, сводится к одной точке $(0, 0)$.]

5) Пусть X — компактное пространство, H — некоторое множество непрерывных числовых функций на X и R — отношение эквивалентности «$u(x) = u(y)$ для всех $u \in H$». Для того чтобы непрерывная числовая функция f на X была равномерно аппроксимируема полиномами (соотв. полиномами без постоянного члена) относительно функций из H, необходимо и достаточно, чтобы f была постоянной на каждом классе эквивалентности по R (соотв. чтобы f была постоянной на каждом классе эквивалентности по R и равна нулю на множестве тех точек, в которых все функции $u \in H$ обращаются в нуль).

*6) Пусть X — вполне регулярное пространство и $\mathscr{C}^\infty(X; \mathbf{R})$ — нормированная подалгебра алгебры $\mathscr{B}(X; \mathbf{R})$, образованная всеми ограниченными непрерывными числовыми функциями на X. Для того чтобы всякая подалгебра алгебры $\mathscr{C}^\infty(X; \mathbf{R})$, отделяющая точки пространства X и содержащая все постоянные функции, была плотна в $\mathscr{C}^\infty(X; \mathbf{R})$, необходимо и достаточно, чтобы X было компактным. [Пусть βX — компактификация Стоуна — Чеха пространства X (гл. IX, § 1, упражнение 7). Заметив, что $\mathscr{C}^\infty(X; \mathbf{R})$ отождествимо с $\mathscr{C}(\beta X; \mathbf{R})$, показать, что если $\beta X - X$ не пусто, то в $\mathscr{C}^\infty(X; \mathbf{R})$ имеются не плотные подалгебры, отделяющие точки пространства X и содержащие все постоянные функции.]

*7) Пусть X — не компактное вполне регулярное пространство.

а) Показать равносильность следующих свойств:

α) Подалгебра алгебры $\mathscr{C}^\infty(X; \mathbf{R})$, состоящая из функций вида $c + f$, где c — постоянная, а f имеет компактный носитель (гл. IX, § 4, n° 3), плотна в $\mathscr{C}^\infty(X; \mathbf{R})$.

β) $\beta X - X$, где βX — компактификация Стоуна — Чеха пространства X, сводится к единственной точке.

γ) Существует только одна равномерная структура предкомпактного пространства, согласующаяся с топологией пространства X.

δ) Если замкнутые множества A и B в пространстве X нормально отделимы (гл. IX, § 1, упражнение 11), то одно из них компактно,

ζ) Для каждой равномерной структуры $\mathcal{U}$ в пространстве X, согласующейся с его топологией, и каждого ее окружения V существует множество L, дополнительное к некоторому компактному множеству в X и такое, что $L \times L \subset V$.

θ) Существует только одна равномерная структура, согласующаяся с топологией пространства X.

[Заметив, что α) влечет локальную компактность X и, значит, открытость X в βX, вывести отсюда, что α) влечет β); чтобы убедиться в том, что β) влечет α), использовать теорему Вейерштрасса — Стоуна. Для вывода γ) из β) воспользоваться тем, что равномерная структура, индуцируемая в X из βX, есть сильнейшая из равномерных структур предкомпактного пространства в X, согласующихся с его топологией. Для вывода δ) из γ) использовать упражнение 11 § 1 главы IX. Для вывода ζ) из δ) показать сначала, что для каждого окружения V равномерной структуры $\mathcal{U}$ существует точка $z \in X$, для которой $V(z)$ не компактно; в противном случае X было бы полно в $\mathcal{U}$ и паракомпактно (гл. II, 2-е изд., § 4, упражнение 10; 3-е изд., § 4, упражнение 9), а значит, нормально; показать тогда с помощью δ), что X было бы полукомпактно (гл. IX, § 2, упражнение 14), и воспользоваться упражнением 2 § 4 главы II 2-го изд. (3-е изд., § 4, упражнение 6). Применить затем этот результат к окружению V, определенному неравенством $f(x, x') \leqslant 1$ для некоторого непрерывного отклонения f на X, и вывести из δ), что существует множество L, дополнительное к компактному множеству и X и такое, что $L \times L \subset V$. Наконец, чтобы установить, что ζ) влечет θ), заметить, что всякий ультрафильтр в X либо сходится, либо мажорирует фильтр дополнений к относительно компактным множествам в X.]

б) Показать, что пространство X, обладающее равносильными свойствами пункта а), вейерштрассово (гл. IX, § 1, упражнение 22) [Использовать упражнение 12 § 1 главы IX или заметить, что если X не вейерштрассово, то в X существуют последовательность точек (x_n), не имеющая предельной точки, и непрерывное отображение $f: X \to [0, 1]$ такие, что $f(x_{2n}) = 0$ и $f(x_{2n+1}) = 1$.]

в) Пусть Y — не компактное вполне регулярное пространство. Показать, что подпространство X пространства βY, дополнительное к точке из $\beta Y - Y$, удовлетворяет условиям пункта а).

8) Пусть $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — конечное семейство компактных пространств, $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ — его произведение и A_i для каждого индекса i — замкнутое множество в X_i. Показать, что всякая непрерывная числовая функция на X, равная нулю на объединении множеств $A_i \times \prod_{j \neq i} X_j$

$(1 \leqslant i \leqslant n)$, равномерно аппроксимируема суммами конечного числа функций вида $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto u_1(x_1) \ldots u_n(x_n)$, где u_i для каждого индекса i — непрерывная числовая функция на X_i, равная нулю на A_i.

°9) Пусть $(r_n)_{n \geqslant 1}$ — последовательность всех рациональных чисел из интервала $I = [0, 1]$ в $\mathbf{R}$, расположенных без повторений в каком-либо порядке. Определим по индукции последовательность замкнутых интервалов $I_n \subset I$ следующим образом: I_n имеет своим центром точку r_{k_n} с наименьшим номером, не содержащуюся в объединении интервалов I_p с номерами $p < n$; он имеет длину $\leqslant 1/4^n$ и не пересекается ни с одним I_p с номером $p < n$; таким образом, I_n образуют последовательность замкнутых попарно непересекающихся интервалов. Определим на пространстве $I \times \mathbf{R}$ непрерывную числовую функцию u следующим образом: для каждого целого $n \geqslant 1$ функция $x \mapsto u(x, n)$ равна 1 в некоторой внутренней точке интервала I_n, равна 0 всюду вне I_n и все ее значения содержатся в $[0, 1]$; с другой стороны, для каждого $x \in I$ функция $y \mapsto u(x, y)$ аффинно линейна в каждом из интервалов $[n, n+1]$. Показать, что u не может быть равномерно аппроксимирована на $I \times \mathbf{R}$ линейными комбинациями функций вида $v(x)\, w(y)$, где v — непрерывная функция на I, а w — ограниченная непрерывная функция на $\mathbf{R}$. [В пространстве $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ всех ограниченных непрерывных функций на $\mathbf{R}$ рассмотреть множество всех частичных функций $y \mapsto u(x, y)$, где x пробегает I; показать, что существует такая бесконечная последовательность (u_n) этих функций, что $\| u_n \| = 1$ и $\| u_m - u_n \| = 1$ при $m \neq n$. Вывести отсюда, что в $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ не может существовать конечномерное векторное подпространство E, от которого каждая u_n находилась бы на расстоянии $\leqslant 1/4$: иначе в E существовала бы последовательность точек (v_n) такая, что $\| v_n \| = 2$ и $\| v_n - v_m \| \geqslant 1/2$ при $m \neq n$, в противоречие с тем, что всякое конечномерное подпространство в $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ локально компактно.]

10) Вывести из теоремы Вейерштрасса — Стоуна новое доказательство теоремы Урысона (гл. IX, § 4, теорема 2) для замкнутых подпространств компактного пространства X. [Для замкнутого множества F в X рассмотреть множество H сужений на F всех непрерывных отображений X в $\mathbf{R}$ и заметить, что если $f \in H$ и $|f(x)| \leqslant a$ на F, то существует функция $g \in H$, совпадающая с f на F и такая, что $|g(x)| \leqslant a$ на X.]

*11) а) Пусть X — вполне регулярное пространство и Y — его замкнутое подпространство; отображение $\varphi: u \mapsto u \mid Y$ пространства $\mathscr{C}^\infty(X; \mathbf{R})$ в $\mathscr{C}^\infty(Y; \mathbf{R})$ линейно, непрерывно и имеет норму $\leqslant 1$. Если X нормально, то φ — *сюръективный строгий морфизм*; кроме того, если X_Y — факторпространство пространства X, полученное отождествлением всех точек из Y (и нормальное согласно упражнению 15

§ 4 главы IX), то ядро отображения φ отождествимо (вместе с нормой) с подпространством пространства $\mathscr{C}^\infty(X_Y; \mathbf{R})$, образованным всеми функциями, равными нулю в ω, каноническом образе Y в X_Y.

б) Предположим, что X метризуемо и граница подпространства Y в X — счетного типа. Показать, что $\varphi: u \mapsto u \mid Y$ есть строгий морфизм, *обратимый справа* (гл. III, 3-е изд., § 6, предложение 3). [Пусть d — расстояние, согласующееся с топологией пространства X, (a_n) — последовательность точек из $\mathrm{Fr}(Y)$, плотная в $\mathrm{Fr}(Y)$, и $V_{n,m}$ — множество тех $x \in X$, для которых $d(x, a_n) < 1/m$ и $d(x, Y) > 1/2m$. Построить семейство непрерывных отображений $f_{n,m}$ пространства X в $[0, 1]$ так, чтобы носитель функции $f_{n,m}$ содержался в $V_{n,m}$ и $\sum_{n,m} f_{n,m}(x) = 1$ на $\mathbf{C}Y$, причем семейство $(f_{n,m})$ было равномерно суммируемо в надлежащей окрестности каждой точки из $\mathbf{C}Y$. Показать, что тогда для всякой функции $v \in \mathscr{C}^\infty(Y; \mathbf{R})$ функция u, равная v на Y и $\sum_{n,m} v(a_n) f_{n,m}(x)$ в каждой точке $x \in \mathbf{C}Y$, принадлежит $\mathscr{C}^\infty(X; \mathbf{R})$ и такова, что $\varphi(u) = v$.] *)

12) а) Пусть X — компактное пространство, $f: X \to Y$ — его *сюръективное* непрерывное отображение на компактное пространство Y. Показать, что отображение ${}^a f: u \mapsto u \circ f$ алгебры $\mathscr{C}(Y; \mathbf{R})$ в $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ есть изоморфизм (сохраняющий норму) алгебры $\mathscr{C}(Y; \mathbf{R})$ на замкнутую подалгебру алгебры $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, содержащую единичный элемент.

б) Обратно, пусть A — замкнутая подалгебра алгебры $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, содержащая единичный элемент. Показать, что существует такое сюръективное непрерывное отображение f пространства X на некоторое компактное пространство Y, что ${}^a f$ есть изоморфизм $\mathscr{C}(Y; \mathbf{R})$ на A. [Пусть $(u_\lambda)_{\lambda \in L}$ — всюду плотное семейство в A; рассмотреть непрерывное отображение $x \mapsto (u_\lambda(x))$ пространства X в $\mathbf{R}^L$ и использовать теорему Вейерштрасса — Стоуна.]

в) Вывести из б), что для каждой последовательности (u_n) элементов из $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ существуют *метризуемое* компактное пространство Y и сюръективное непрерывное отображение $f: X \to Y$ такие, что все u_n принадлежат образу $\mathscr{C}(Y; R)$ при отображении ${}^a f$.

*13) Пусть X — компактное пространство и A — нормированная алгебра $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$. Для каждого $M \subset A$ обозначим через $V(M)$ множество тех $x \in X$, для которых $u(x) = 0$ при всех $u \in M$, и для каждого $Y \subset X$ обозначим через $\mathfrak{I}(Y)$ множество тех $u \in A$, для которых $u(x) = 0$ на Y.

---

*) Этот результат не распространяется на случай, когда X есть не метризуемое компактное пространство $\beta\mathbf{N}$, а Y — замкнутое множество $\beta\mathbf{N} - \mathbf{N}$ (Топ. вект. пространства, гл. IV, § 5, упражнение 5в).

а) $V(M)$ есть замкнутое подпространство пространства X, $\Im(Y)$ — замкнутый идеал алгебры A. Если $\mathfrak{a}$ — идеал алгебры A, порожденный множеством $M \subset A$, то $V(M) = V(\mathfrak{a})$; V и $\Im$ — убывающие отображения по отношению включения и $V(\{0\}) = X$, $V(A) = \varnothing$, $V(\{u\}) = \varnothing$ для каждого обратимого элемента u алгебры A, $V\left(\bigcup_{\lambda\in L} M_\lambda\right) = V\left(\sum_{\lambda\in L} M_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in L} V(M_\lambda)$ для каждого семейства $(M_\lambda)_{\lambda\in L}$ подмножеств алгебры A, $V(MM') = V(M) \cup V(M')$, $\Im(X) = \{0\}$, $\Im(\varnothing) = A$, $\Im\left(\bigcup_{\lambda\in L} Y_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in L} \Im(Y_\lambda)$ для каждого семейства $(Y_\lambda)_{\lambda\in L}$ множеств в X.

б) Показать, что $\Im(V(\mathfrak{a})) = \bar{\mathfrak{a}}$ для каждого идеала $\mathfrak{a}$ алгебры A и $V(\Im(Y)) = \overline{Y}$ для каждого множества $Y \subset X$. [При доказательстве первого равенства учесть, что $V(\bar{\mathfrak{a}}) = V(\mathfrak{a})$, так что $\mathfrak{a}$ можно предполагать замкнутым; заметить, что если x и y — различные точки из X — $V(\mathfrak{a})$, то существует $u \in \mathfrak{a}$ такое, что $u(x) \neq u(y)$, и использовать предложение 4. Для доказательства второго равенства использовать теорему Урысона.]

в) Вывести из б), что $x \mapsto \Im(\{x\})$ есть биекция пространства X на множество всех максимальных идеалов алгебры A, которые, таким образом, замкнуты. Для того чтобы идеал алгебры A был замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы он был пересечением максимальных идеалов. Кольцо A не обладает радикалом (Алгебра, гл. VIII, § 6, n° 3).

г) Показать, что отображение $e \mapsto V(\{e\})$ есть биекция множества всех идемпотентов алгебры A на множество всех открыто-замкнутых подмножеств пространства X. Для того чтобы точка $x \in X$ была изолированной, необходимо и достаточно, чтобы максимальный идеал $\Im(\{x\})$ был главным.

14) Пусть X — топологическое пространство. Для каждой функции $u \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ такой, что $u(x) > 0$ во всех точках $x \in X$, обозначим через V_u множество всех функций $f \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, для которых $|f| \leqslant u$.

а) Показать, что множества V_u являются окрестностями нуля в некоторой отделимой топологии $\mathscr{T}$ в $A = \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, согласующейся со структурой кольца A.

б) Топология, которую $\mathscr{T}$ индуцирует в $\mathscr{C}^\infty(X; \mathbf{R})$, мажорирует топологию равномерной сходимости на X; для того чтобы эти топологии совпадали, необходимо и достаточно, чтобы X было вейерштрассовым (гл. IX, § 1, упражнение 22). Если X не вейерштрассово, то $\mathscr{T}$ индуцирует в множестве всех постоянных функций дискретную топологию, так что $\mathscr{T}$ не согласуется со структурой векторного пространства (над $\mathbf{R}$) в A.

в) Показать, что A, наделенное топологией $\mathscr{T}$, есть гельфандово кольцо (гл. III, 3-е изд., § 6, упражнение 11).

*15) Пусть X — вполне регулярное пространство и βX — его компактификация Стоуна — Чеха; наделим кольцо $A = \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ топологией $\mathscr{T}$, определенной в упражнении 14. Пусть $V(f)$ для каждого $f \in A$ означает замыкание в βX множества $f^{-1}(0) \subset X$, $V(M)$ для каждого $M \subset A$ — пересечение всех $V(f)$ ($f \in M$) и $\Im(Y)$ для каждого $Y \subset \beta X$ — множество тех $f \in A$, для которых $Y \subset V(f)$; вместо $\Im(\{x\})$ будем писать $\Im(x)$. Для того чтобы $V(f) = \varnothing$, необходимо и достаточно, чтобы f было обратимо в A.

а) Показать, что если f и g — функции из A, для которых $f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) = \varnothing$, то также $V(f) \cap V(g) = \varnothing$. [Рассмотреть ограниченную непрерывную функцию $|f|/(|f| + |g|)$.] Вывести отсюда, что, каково бы ни было $M \subset A$, $V(M) = V(\mathfrak{a})$, где $\mathfrak{a}$ — идеал в A, порожденный множеством M.

б) Показать, что $\Im(Y)$ есть идеал в A для каждого множества $Y \subset \beta X$ [использовать а)], причем $V(\Im(Y)) = \overline{Y}$ (замыканию Y в βX).

в) Пусть u — такая функция из A, что $u(x) > 0$ во всех точках $x \in X$, и g — функция из A. Показать, что существует функция $f' \in A$ такая, что $|f - g| \leqslant u$, а $V(f)$ есть окрестность множества $V(g)$. [Показать, что функция f, равная $g + u$ там, где $g(x) + u(x) < 0$, равная $g - u$ там, где $g(x) - u(x) > 0$, и равная 0 в остальных точках, обладает требуемыми свойствами; рассмотреть функцию $f' = \inf((u + g)^+, (u - g)^-)$ и использовать а).]

г) Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в A; показать, что если функция $f \in A$ такова, что $V(f)$ есть окрестность множества $V(\mathfrak{a})$, то $f \in \mathfrak{a}$. [Заметить прежде всего, что существует $g \in \mathfrak{a}$, для которого $V(g)$ содержится во внутренности $V(f)$, и затем рассмотреть функцию h на X, равную $f(x)/g(x)$ там, где $f(x) \neq 0$, и равную 0 там, где $f(x) = 0$.]

д) Вывести из в) и г), что $\Im(V(\mathfrak{a})) = \overline{\mathfrak{a}}$ для всякого идеала $\mathfrak{a}$ в A. [Показать сначала, рассуждая от противного, что $V(M) = V(\overline{M})$ для каждого $M \subset A$.] Вывести отсюда, что $\Im(Y)$ есть замкнутый идеал в A для каждого $Y \subset \beta X$. [Заметить, что $\Im(Y) = \Im(V(\Im(Y)))$.]

е) Заключить из д), что $x \mapsto \Im(x)$ есть биекция βX на множество всех максимальных идеалов (необходимо замкнутых) кольца A. Для того чтобы идеал в A был замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы он был пересечением максимальных идеалов. A — кольцо без радикала.

*16) Предположения и обозначения те же, что в упражнении 15.

а) Пусть $\mathfrak{a}$ — замкнутый идеал кольца A. Показать, что в факторкольце $A/\mathfrak{a}$ множество P канонических образов всех функций $f \geqslant 0$ из A есть множество всех элементов $\geqslant 0$ в некоторой структуре порядка, превращающей $A/\mathfrak{a}$ в *решеточно упорядоченное кольцо*. [Заметить, используя упражнение 15д), что если f и g принадлежат $\mathfrak{a}$, то то же верно для $|f| + |g|$, как и для всякой функции $h \in A$ такой, что

$|h| \leqslant |f|$.] Канонический образ в A/a множества всех постоянных функций изоморфен $\mathbf{R}$ с его структурой упорядоченного поля.]

б) В частности, для каждого $x \in \beta X$, $A/\Im(x)$ канонически наделяется структурой упорядоченного поля. Максимальный идеал $\Im(x)$ называют *вещественным*, если $A/\Im(x)$ изоморфно $\mathbf{R}$, и *гипервещественным* — в противном случае. Для того чтобы $\Im(x)$ был гипервещественным, необходимо и достаточно, чтобы $x \in \beta X - X$ и существовала обратимая функция $f \in A$ такая, что $\lim_{y \to x,\ y \in X} f(y) = 0$. Вывести отсюда, что для того, чтобы все максимальные идеалы в A были вещественными, необходимо и достаточно, чтобы X было вейерштрассовым (гл. IX, § 1, упражнение 22).

в) Пусть φ_x для каждого $x \in \beta X$ — канонический гомоморфизм $A \to A/\Im(x)$. Для того чтобы $\varphi_x(f) \geqslant 0$ на $A/\Im(x)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $g \in \Im(x)$ такая, что $f(y) \geqslant 0$ на $\overset{-1}{g}(0)$. [Заметить, что отношение $\varphi_x(f) \geqslant 0$ эквивалентно сравнению $f \equiv |f| \pmod{\Im(x)}$.] Для того чтобы $\varphi_x(f) > 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $g \in \Im(x)$ такая, что $f(y) > 0$ на $\overset{-1}{g}(0)$. [Заметить, используя упражнение 15, что если $f \notin \Im(x)$, то существует функция $g \in \Im(x)$, для которой $\overset{-1}{f}(0) \cap \overset{-1}{g}(0) = \varnothing$.]

г) Показать, что если $\Im(x)$ гипервещественный, то степень трансцендентности (Алг., гл. V, § 5, упражнение 1) поля $A/\Im(x)$ над $\mathbf{R}$ не меньше чем $\mathfrak{c} = \mathrm{Card}(\mathbf{R})$. [Пусть $f > 0$ — обратимый элемент из A, для которого $\varphi_x(f) = u$ бесконечно большое относительно $\mathbf{R}$ (Алг., гл. VI, § 2, упражнение 1). Показать, что если r пробегает элементы какого-либо базиса для $\mathbf{R}$ над $\mathbf{Q}$ (состоящего из чисел >0), то элементы $\varphi_x(f^r)$ факторкольца $A/\Im(x)$ алгебраически независимы.]

°д) Пусть $f_a(X)$ для каждой точки $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ означает полином $X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n$; далее $\nu(\xi)$ для каждого вещественного числа ξ есть сумма кратностей нулей z полинома f_a в $\mathbf{C}$, у которых $\mathscr{R}(z) = \xi$, и $\rho_k(a)$ для каждого целого k такого, что $1 \leqslant k \leqslant n$, означает наименьшее вещественное число ξ, для которого $\sum_{\eta \leqslant \xi} \nu(\eta) \geqslant k$. Показать, что функции ρ_k непрерывны на $\mathbf{R}^n$. [Использовать теорему Руше.]

е) Доказать, что упорядоченное поле $A/\Im(x)$ для каждого $x \in \beta X$ *максимально* (Алг., гл. VI, § 2, n° 5). [Пусть $F(X) = X^n + f_1 X^{n-1} + \ldots + f_n$ — полином нечетной степени с коэффициентами из A; функции $g_k(y) = \rho_k(f_1(y), \ldots, f_n(y))$, где ρ_k — функции, определенные в д), непрерывны на X, и для каждого $y \in X$ имеется индекс k такой, что $F(g_k(y)) = 0$; вывести отсюда, что произведение $F(g_1) \ldots F(g_n)$ принадлежит $\Im(x)$.]

ж) Пусть X — бесконечное дискретное пространство, $y \mapsto F_y$ — биекция X на множество всех его конечных подмножеств и M_z для каждого $z \in X$ — множество тех $y \in X$, для которых $z \in F_y$; эти множества образуют базис некоторого фильтра $\mathfrak{F}$ на X; пусть x — точка из βX такая, что соответствующий ей ультрафильтр в X (гл. I, 3-е изд., § 9, упражнение 27) мажорирует $\mathfrak{F}$. Пусть B — подмножество в A, для которого Card $(B) \leqslant$ Card (X), и $y \mapsto g_y$ — сюръективное отображение $X \to B$. Для каждого $z \in X$ положим $f(z) = 1 + \sup_{y \in F_z} g_y(z)$. Показать, что $f(z) > g_y(z)$ для всех $z \in M_y$, и вывести отсюда, что $\varphi_x(f) > \varphi_x(g_y)$ для всех $y \in Y$. [Использовать в).] Заключить, что Card $(A/\mathfrak{F}(x)) >$ Card (X).

*17) Предположения и обозначения те же, что в упражнении 15.

а) Для того чтобы максимальный идеал $\mathfrak{F}(x)$ был вещественным, необходимо и достаточно, чтобы для каждой бесконечной последовательности (g_n) элементов из $\mathfrak{F}(x)$ множества $g_n^{-1}(0)$ имели непустое пересечение. [Использовать упражнение 16б); чтобы убедиться в необходимости условия, показать, что если пересечение всех $g_n^{-1}(0)$ пусто, то функция $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \inf(g_n(y), 2^{-n})$ непрерывна, обратима в A и стремится к 0, когда y стремится к x, оставаясь в X; заметить, что $f(y) \leqslant 2^{-m}$ на пересечении всех $g_k^{-1}(0)$ с $k \leqslant m$, и использовать упражнение 15а), а также то, что множества $V(g)$ ($g \in \mathfrak{F}(x)$) образуют фундаментальную систему окрестностей точки x в βX.]

б) X называют *вещественно полным*, если единственные вещественные максимальные идеалы $\mathfrak{F}(x)$ — те, для которых $x \in X$. Показать, что всякое вполне регулярное линделефово пространство (гл. I, 3-е изд., § 9, упражнение 15) вещественно полно. [Использовать а).] Вейерштрассово вполне регулярное пространство вещественно полно, только когда оно компактно.

в) Пусть υX — множество тех $x \in \beta X$, для которых $\mathfrak{F}(x)$ — вещественный максимальный идеал; показать, что всякая числовая функция $f \in A$ может быть непрерывно продолжена на υX, так что $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ и $\mathscr{C}(\upsilon X; \mathbf{R})$ канонически отождествимы. Доказать, что подпространство υX пространства βX вещественно полно. [Заметить, что если f обратима в $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, то ее непрерывное продолжение на υX обратимо в $\mathscr{C}(\upsilon X; \mathbf{R})$, и что $\beta(\upsilon X) = \beta X$.] υX называют *вещественным пополнением* пространства X.

г) Показать, что υX является пополнением X, наделенного слабейшей из равномерных структур, при которых все функции $f \in A$ равномерно непрерывны. [Заметить, что всякий фильтр Коши $\mathfrak{F}$ в X сходится относительно этой равномерной структуры к некоторой точке $x \in \beta X$; если бы x не принадлежала υX, то существовала бы функция $f \in A$, неограниченная на некотором множестве из $\mathfrak{F}$.]

д) Вывести из г), что всякое непрерывное отображение $u\colon X \to Y$ вполне регулярного пространства X в вещественно полное пространство Y продолжается по непрерывности до отображения υX в Y. Таким образом, пространство υX является решением проблемы универсального отображения, где Σ — структура вещественно полного пространства, а α-отображения и морфизмы — все непрерывные отображения (Теор. множ., гл. IV, § 3, n° 1).

е) Показать, что всякое замкнутое подпространство вещественно полного пространства вещественно полно; произведение всякого семейства вещественно полных пространств вещественно полно; в отделимом пространстве пересечение всякого семейства вещественно полных подпространств вещественно полно. [Чтобы доказать, например, что замкнутое подпространство X вещественно полного пространства Y вещественно полно, рассмотреть продолжение $\bar{\jmath}$ на υX канонической инъекции $j\colon X \to Y$ и заметить, что $\bar{\jmath}^{-1}(X) = X$; вывести отсюда, что X замкнуто в υX. В остальных двух случаях рассуждения аналогичны.]

ж) Вывести из б), г) и е), что для того, чтобы вполне регулярное пространство было вещественно полно, необходимо и достаточно, чтобы оно было гомеоморфно замкнутому подпространству некоторого произведения $\mathbf{R}^I$.

18) Пусть X — вещественно полное пространство.

а) Показать, что для всякого гомоморфизма u алгебры $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ в $\mathbf{R}$, не равного тождественно нулю, существует, и притом единственная, точка $x \in X$ такая, что $u(f) = f(x)$ для всех $f \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$.

б) Пусть Y — второе вещественно полное пространство. Показать, что для каждого гомоморфизма $\mathbf{R}$-алгебр $v\colon \mathscr{C}(Y; \mathbf{R}) \to \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, переводящего единичный элемент в единичный, существует, и притом единственное, непрерывное отображение $w\colon X \to Y$ такое, что $v(g) = g \circ w$. [Использовать а).] В частности, для того чтобы $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ и $\mathscr{C}(Y; \mathbf{R})$ были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы X и Y были гомеоморфны.

*19) Пусть X — компактное пространство и A — нормированная алгебра $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ над $\mathbf{C}$. Показать, что для всякого замкнутого идеала $\mathfrak{a}$ в A отношение $f \in \mathfrak{a}$ влечет $\bar{f} \in \mathfrak{a}$. [Заметить, что $\bar{f}$ — равномерный предел функций вида gf.] Распространить тогда на алгебру A результаты упражнения 13.

*20) а) Пусть X — компактное пространство, A — алгебра конечного ранга над полем $\mathbf{R}$, обладающая единичным элементом и наделенная топологией, определенной в n° 5 § 1 главы VI, и B — подалгебра $\mathbf{R}$-алгебры $\mathscr{C}(X; A)$. Предположим, что для каждого $\varepsilon > 0$, каждой пары различных точек x, y из X и каждой пары элементов u, v из A существует функция $f \in B$ такая, что $\| f(x) - u \| \leqslant \varepsilon$ и $\| f(y) - v \| \leqslant \varepsilon$ (где $\| z \|$ — какая-либо норма, определяющая топологию алгебры A); предположим, кроме того, что если u и v при-

надлежат R, то имеется функция $f \in B$, удовлетворяющая предыдущим условиям и принимающая значения в R. Показать, что при этих условиях B плотна в $\mathscr{C}(X; A)$ в топологии равномерной сходимости. [Доказать сначала, что каждая функция из $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ равномерно аппроксимируема функциями из B, а затем, используя сделанное предположение и некоторое разбиение единицы,— что то же верно для любой постоянной $a \in A$.]

б) Возьмем в качестве A тело кватернионов H над R. Пусть B — подалгебра R-алгебры $\mathscr{C}(X; \mathbf{H})$ такая, что: 1° вместе с каждой функцией $f \in B$ также сопряженная $\bar{f}$ к ней (определенная для всех $x \in X$ равенством $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$) принадлежит B; 2° для каждого $\varepsilon > 0$, каждой пары различных точек x, y из X и каждой пары элементов u, v из H существует функция $f \in B$ такая, что $\| f(x) - u \| \leqslant \varepsilon$ и $\| f(y) - v \| \leqslant \varepsilon$. Показать, что B всюду плотна в $\mathscr{C}(X; \mathbf{H})$. [Использовать а).]

в) Распространить на алгебру $\mathscr{C}(X; \mathbf{H})$ результаты упражнения 13 и показать, в частности, что всякий замкнутый идеал этой алгебры — двусторонний. [Рассуждать, как в упражнении 19, используя б).]

*21) а) Пусть X — вполне несвязное компактное пространство и A — топологическое кольцо. Наделим кольцо $\mathscr{C}(X; A)$ топологией равномерной сходимости (согласующейся со структурой кольца). Пусть $\mathfrak{a}$ — левый идеал в $\mathscr{C}(X; A)$ и $\mathfrak{J}(x)$, для каждого $x \in X$, замыкание в A множества всех $f(x)$, где f пробегает $\mathfrak{a}$, которое является замкнутым левым идеалом в A. Показать, что $\bar{\mathfrak{a}}$ совпадает с множеством тех $f \in \mathscr{C}(X; A)$, для которых $f(x) \in \mathfrak{J}(x)$ при всех $x \in X$. [Заметить, что открыто-замкнутые окрестности каждой точки $x \in X$ образуют фундаментальную систему ее окрестностей.]

б) Предположим, кроме того, что в A существует фундаментальная система окрестностей нуля, образованная двусторонними идеалами. Пусть B — подкольцо кольца $\mathscr{C}(X; A)$, содержащее постоянные и отделяющее точки пространства X; показать, что B плотно в $\mathscr{C}(X; A)$. [Показать, что, каковы бы ни были замкнутое множество F в X, точка $x \notin F$ и окрестность U нуля в A, существует $f \in B$ такое, что $f(x) = 1$, а $f(y) \in U$ для всех $y \in F$.]

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

К ГЛАВЕ X

(Римские цифры относятся к библиографии, помещенной в конце настоящего очерка)

Как известно, понятие произвольной функции оформилось лишь в начале XIX века. Тем более идея общего изучения множеств функций и наделения их топологической структурой не появлялась до Римана (см. Исторический очерк к главе I) и начала проникать в печатные труды только к концу XIX века.

Однако понятием сходимости последовательности числовых функций стали более или менее сознательно пользоваться уже с первых шагов исчисления бесконечно малых. Но при этом речь шла только о простой сходимости, и иначе быть не могло до того, как понятия сходящегося ряда и непрерывной функции не были точно определены Больцано и Коши. Но последний вначале не заметил различия между простой и равномерной сходимостью и полагал, что можно доказать непрерывность суммы всякого сходящегося ряда непрерывных функций (I, (2), том III, стр. 120). Ошибка была почти тотчас же обнаружена Абелем, который доказал в то же время, что сумма всякого степенного ряда непрерывна внутри его интервала сходимости, применив ставшее классическим рассуждение, существенно использующее применительно к этому частному случаю идею равномерной сходимости (II, стр. 223—224). Оставалось лишь выделить эту последнюю в общем виде, что было сделано независимо Стоксом и Зейделем в 1847—1848 гг. и самим Коши в 1853 г. (I, (1), том XII, стр. 30) *).

Под влиянием Вейерштрасса и Римана систематическое изучение понятия равномерной сходимости и связанных с ним вопросов развертывалось в последней трети XIX века немецкой школой (Ханкель, Дюбуа-Реймон) и особенно итальянской: Дини и Арчела уточнили условия, необходимые для непрерывности предела последовательности непрерывных функций, тогда как Асколи ввел фундаментальное понятие равностепенной непрерыв-

*) В одной работе, датированной 1841 г., но опубликованной только в 1894 г. (IVa, стр. 67), Вейерштрасс с полной отчетливостью пользуется понятием равномерной сходимости (которому он первый дал это имя) для рядов по степеням одной или нескольких комплексных переменных.

ности и доказал теорему, характеризующую компактные множества непрерывных функций (III) (теорему, популяризованную позже Монтелем в его теории «нормальных семейств», представляющих собой не что иное, как относительно компактные множества аналитических функций).

С другой стороны, сам Вейерштрасс (IVб) открыл возможность равномерно аппроксимировать полиномами непрерывную числовую функцию одной или нескольких вещественных переменных на ограниченном множестве — результат, который сразу возбудил живой интерес и привел к многочисленным «количественным» исследованиям, выходящим, однако, за рамки интересующего нас круга вопросов *).

Современный вклад в эти вопросы заключался главным образом в придании им всей свойственной им значимости путем распространения их на функции, области определения и значений которых не ограничены пространством R или конечномерными пространствами, тем самым очертив с помощью общих топологических понятий их естественные рамки. В частности, теорема Вейерштрасса, уже проявившая себя как орудие первостепенной важности в классическом анализе, была в последние годы распространена на гораздо более общий случай Стоуном: развивая одну идею Лебега (примененную последним в его доказательстве теоремы Вейерштрасса), Стоун выявил важную роль, которую играют в аппроксимации непрерывных числовых функций решеточные множества (аппроксимация «решеточными полиномами», см. § 4, предложение 2 и теорему 2) и, с другой стороны, показал, как обобщенная теорема Вейерштрасса сразу влечет целый ряд аналогичных аппроксимационных теорем, которые таким образом группируются более связным образом; мы довольно близко придерживались его изложения (V).

*) См., например, C. De La Vallée Poussin, *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle* (Paris, Gauthier-Villars, 1919).

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) A.-L. Cauchy, Oeuvres, Paris (Gauthier-Villars), 1882—1932.

(II) N. A. Abel, Oeuvres, т. I, éd. Sylow et Lie, Christiania, 1881.

(III) G. Ascoli, Sulle curve limiti di una varietà data di curve, Mem. Accad. Lincei (III), т. XVIII (1883), стр. 521—586.

(IV) K. Weierstrass, Mathematische Werke, Berlin (Mayer und Müller), 1894—1903: a) Zur Theorie der Potenzreihen, Bd. I, стр. 67—74; б) Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente, Bd. III, стр. 1—37.

(V) M. H. Stone, The generalized Weierstrass approximation theorem, Mathematics Magazine, т. XXI (1948), стр. 167—183 и 237—254.

СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ КНИГИ III

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая сводка задумана, прежде всего, как некоторый справочник: для каждого из основных понятий топологии мы старались сгруппировать в возможно более кратком виде все существенные результаты, в которых оно участвует, так, чтобы при необходимости его использования оно было сразу под рукой. В частности, собраны вместе признаки, позволяющие утверждать, что некоторое множество или отображение обладает тем или другим свойством, например быть компактным или непрерывным. Этот способ изложения, с одной стороны, порождает повторения: например, теорема, утверждающая, что образ компактного множества при непрерывном отображении (в отделимое пространство) компактен, находится и в параграфе, посвященном непрерывным функциям, и в параграфе, посвященном компактным пространствам. С другой стороны, очень часто понятие упоминается в параграфе, предшествующем тому, в котором оно определено; указатель терминов, помещенный в конце книги, отсылает тогда к тому месту, где дано определение. Разумеется, знакомство с понятиями и результатами книг I и II, используемыми в книге III, предполагается; кроме того, предполагается, что читатель знаком с теорией вещественных чисел.

В соответствии с характером сводки она не содержит доказательств формулируемых результатов; для наиболее трудных теорем даны ссылки на то место книги III, где доказательство изложено.

Наконец, в виде исключения было сочтено полезным привести в этой сводке некоторые результаты, доказательства которых в книге III отсутствуют; эти результаты всегда окаймлены знаками $^{c}\ldots{}_{c}$.

§ 1. Топологические структуры; открытые множества, окрестности, замкнутые множества

1. Говорят, что множество $\mathfrak{O}$ подмножеств множества E определяет в E *топологическую структуру* (или *топологию*), если оно обладает следующими свойствами:

(O_I) *Объединение всякого семейства множеств из* $\mathfrak{O}$ *есть множество из* $\mathfrak{O}$.

(O_{IIa}) *Пересечение всяких двух множеств из* $\mathfrak{O}$ *есть множество из* $\mathfrak{O}$.

(O_{IIb}) *Множество* E *принадлежит* $\mathfrak{O}$.

Множества из $\mathfrak{O}$ называют *открытыми множествами* топологии, определяемой множеством $\mathfrak{O}$. Множество E, наделенное топологической структурой, называют *топологическим пространством*, а его элементы — *точками*.

В топологическом пространстве пустое множество открыто; пересечение любого конечного числа открытых множеств открыто.

Каково бы ни было множество E, множество $\mathfrak{P}(E)$ всевозможных его подмножеств обладает свойствами (O_I), (O_{IIa}) и (O_{IIb}); определяемую им топологию называют *дискретной топологией* в E, а E, наделенное этой топологией, — *дискретным пространством*. Для того чтобы топологическое пространство было дискретно, необходимо и достаточно, чтобы всякое одноточечное множество в нем было открыто.

Покрытие множества в топологическом пространстве называют *открытым*, если оно состоит из открытых множеств.

Пусть E и E' — топологические пространства; биективное отображение $f\colon E \to E'$ называют *гомеоморфизмом* E на E', если f есть изоморфизм топологии пространства E на топологию пространства E', другими словами, если образом множества всех открытых множеств пространства E при отображении f служит множество всех открытых множеств пространства E'. То же самое можно выразить, сказав, что f и его обращение непрерывно.

2. Пусть f — непрерывное отображение топологического пространства E в топологическое пространство F; тогда прообраз $f^{\iota}(A)$ каждого открытого множества A из F есть открытое множество в E.

В частности, в метрическом пространстве всякий открытый шар есть открытое множество.

Если g — полунепрерывная снизу (соотв. сверху) числовая функция на топологическом пространстве E, то множество тех $x \in E$, для которых $g(x) > k$ (соотв. $g(x) < k$), открыто. Для того чтобы множество A было открытым в E, необходимо и достаточно, чтобы его характеристическая функция φ_A была полунепрерывна снизу.

3. *Окрестностью* множества A в топологическом пространстве E называют всякое множество, обладающее открытым подмножеством, содержащим A. Окрестности одноточечного множества $\{x\}$ называют также окрестностями точки x.

Всякая окрестность множества $A \subset E$ является также окрестностью любого множества $B \subset A$. Для того чтобы множество было окрестностью каждой своей точки, необходимо и достаточно, чтобы оно было открытым.

4. Окрестности непустого множества A в топологическом пространстве E образуют фильтр. Всякий базис этого фильтра называют *фундаментальной системой окрестностей множества* A; для того чтобы множество $\mathfrak{S}$ окрестностей множества A было фундаментальной системой окрестностей этого множества, необходимо и достаточно, чтобы каждая окрестность множества A содержала множество из $\mathfrak{S}$.

5. Пусть E — равномерное пространство, $\mathfrak{S}$ — фундаментальная система его окружений; для каждой точки $x_0 \in E$ множества $V(x_0)$, где V пробегает $\mathfrak{S}$, образуют фундаментальную систему окрестностей этой точки в E. Для произвольного множества $A \subset E$ множества $V(A)$ являются его окрестностями, но вообще не образуют фундаментальной системы его окрестностей; однако они образуют такую систему, если E отделимо, а множество A компактно. Если V открытое множество в $E \times E$, то $V(A)$ — открытое множество в E.

В том более частном случае, когда E — метрическое пространство, все открытые (соотв. замкнутые) шары с центром x_0 образуют фундаментальную систему окрестностей точки x_0; то же верно и для открытых (соотв. замкнутых) шаров с центром x_0 и радиусами ε_n, где (ε_n) — убывающая последовательность веще-

ственных чисел, стремящаяся к нулю. Для произвольного множества $A \subset E$ и произвольного числа $r > 0$ множество точек из E, удаленных от A на расстояние $< r$ (соотв. $\leqslant r$), есть открытая (соотв. замкнутая) окрестность этого множества A.

В регулярном пространстве всякая точка обладает фундаментальной системой замкнутых окрестностей. В нормальном пространстве всякое замкнутое множество обладает фундаментальной системой замкнутых окрестностей. В локально компактном пространстве всякое компактное множество обладает фундаментальной системой компактных окрестностей.

6. Пусть E — произвольное множество и $\mathfrak{V}(x)$ для каждой точки $x \in E$ — фильтр в E. Для существования в E топологии $\mathcal{T}$ такой, чтобы при любом $x \in E$ фильтр $\mathfrak{V}(x)$ был фильтром окрестностей точки x, необходимо и достаточно, чтобы фильтры $\mathfrak{V}(x)$ удовлетворяли следующим условиям:

(V_{III}) *Каждая точка $x \in E$ принадлежит всем множествам фильтра $\mathfrak{V}(x)$.*

(V_{IV}) *Для каждой точки $x \in E$ и каждого множества $V \in \mathfrak{V}(x)$ существует множество $W \in \mathfrak{V}(x)$ такое, что $V \in \mathfrak{V}(y)$, каково бы ни было $y \in W$.*

Топология $\mathcal{T}$ тогда единственна: для того чтобы множество A было открытым в топологии $\mathcal{T}$, необходимо и достаточно, чтобы $A \in \mathfrak{V}(x)$ для каждой точки $x \in A$.

7. В топологическом пространстве множество называют *замкнутым*, если его дополнение — открытое. Все пространство и пустое множество открыто-замкнуты, т. е. одновременно открыты и замкнуты. Пересечение всякого семейства замкнутых множеств замкнуто. Объединение любого конечного числа замкнутых множеств замкнуто. Покрытие множества в топологическом пространстве называют *замкнутым*, если оно состоит из замкнутых множеств.

В отделимом пространстве всякое компактное множество (и, в частности, всякое конечное множество) замкнуто.

В отделимом равномерном пространстве всякое полное подпространство замкнуто.

В локально компактном пространстве всякое множество, имеющее замкнутое пересечение с каждым компактным множеством, замкнуто.

В метризуемом пространстве всякое замкнутое множество есть пересечение счетного семейства открытых множеств, а всякое открытое множество — объединение счетного семейства замкнутых.

8. Пусть f — непрерывное отображение топологического пространства E в топологическое пространство F. Прообраз $\overset{-1}{f}(A)$ каждого замкнутого множества A из F есть замкнутое множество в E. В частности, в метрическом пространстве всякий замкнутый шар, как и всякая сфера, есть замкнутое множество.

Если f и g — непрерывные отображения пространства E в отделимое пространство F, то множество тех $x \in E$, для которых $f(x) = g(x)$, замкнуто.

Если g — полунепрерывная снизу (соотв. сверху) числовая функция на E, то при любом вещественном k множество тех $x \in E$, для которых $g(x) \leqslant k$ (соотв. $g(x) \geqslant k$), замкнуто. Для того чтобы множество A было замкнутым в E, необходимо и достаточно, чтобы его характеристическая функция φ_A была полунепрерывна сверху.

9. Говорят, что точка x топологического пространства E есть *внутренняя* точка множества $A \subset E$, если A является окрестностью этой точки; совокупность всех внутренних точек множества A называется *внутренностью* A и обозначается $\mathring{A}$; это — наибольшее открытое множество, содержащееся в A. Оно может быть пусто и при непустом A (n° 15). Для того чтобы A было открытым, необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало со своей внутренностью.

$B \subset A$ влечет $\mathring{B} \subset \mathring{A}$; внутренность пересечения любых двух множеств A и B есть пересечение внутренностей этих множеств.

10. Говорят, что точка x топологического пространства E есть *точка прикосновения* множества $A \subset E$, если каждая окрестность точки x пересекается с A; совокупность всех точек прикосновения множества A называется *замыканием* A и обозначается $\overline{A}$; это — наименьшее замкнутое множество, содержащее A. Для того чтобы множество было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало со своим замыканием.

$B \subset A$ влечет $\overline{B} \subset \overline{A}$; замыкание объединения любых двух множеств A и B есть объединение замыканий этих множеств. Замы-

кание множества $A \cap B$ содержится в $\overline{A} \cap \overline{B}$, но может быть отлично от $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Если V пробегает фундаментальную систему окружений равномерного пространства E, то пересечение множеств $V(A)$ совпадает с $\overline{A}$. В частности, в метрическом пространстве, для того чтобы некоторая точка была точкой прикосновения множества A, необходимо и достаточно, чтобы ее расстояние от A было равно нулю.

В метризуемом топологическом пространстве, для того чтобы точка x_0 была точкой прикосновения множества A, необходимо и достаточно, чтобы в A существовала последовательность точек, сходящаяся к x_0.

11. Точку $x \in E$ называют *внешней* для множества A, если она — внутренняя точка его дополнения $\complement A$; совокупность точек, внешних для A, называют *внешностью* A: это — дополнение замыкания A. В метрическом пространстве, для того чтобы некоторая точка была внешней для множества A, необходимо и достаточно, чтобы ее расстояние от A было >0.

12. Точку x называют *граничной точкой* множества A, если она является точкой прикосновения одновременно для A и $\complement A$. Совокупность всех граничных точек множества A называют *границей* A: это — замкнутое множество, являющееся пересечением замыканий A и $\complement A$. Если внутренность A, внешность A и граница A не пусты, то они образуют разбиение всего пространства E. Для того чтобы граница множества A была пуста, необходимо и достаточно, чтобы A было открыто-замкнутым. В связном пространстве E граница непустого множества, отличного от E, никогда не пуста. Если в произвольном пространстве E связное множество C пересекается с множеством A и его дополнением $\complement A$, то оно пересекается с границей A.

13. Если x есть точка прикосновения множества A, не принадлежащая A, то всякая ее окрестность содержит точку из A, отличную от x. Если точка $x_0 \in A$ имеет окрестность, не содержащую ни одной точки из A, отличной от x_0, то говорят, что x_0 есть *изолированная* точка множества A. Для того чтобы все точки множества A были изолированными, необходимо, чтобы подпространство A было дискретно.

Множество $A \subset E$ называют *совершенным*, если оно замкнуто и не имеет изолированных точек.

14. Говорят, что множество A в топологическом пространстве E *плотно относительно множества* $B \subset E$, если всякая точка из B есть точка прикосновения множества A, т. е. если $B \subset \bar{A}$. Если A плотно относительно B, а B плотно относительно C, то A плотно относительно C. Говорят, что A *всюду плотно*, если оно плотно относительно E, т. е. $\bar{A} = E$.

В метризуемом пространстве, для того чтобы множество A было плотно относительно B, необходимо и достаточно, чтобы всякая точка из B была пределом последовательности точек из A.

Для того чтобы в метризуемом пространстве E существовало счетное всюду плотное множество, необходимо и достаточно, чтобы топология пространства E имела счетный базис. Тогда говорят, что E — метризуемое пространство *счетного типа*.

15. Множество A в топологическом пространстве E называется *разреженным*, если его замыкание не имеет внутренних точек или, что равносильно этому, если его внешность всюду плотна. Для того чтобы множество было разреженным, необходимо и достаточно, чтобы его замыкание было разреженным. Для того чтобы замкнутое множество было разреженным, необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало со своей границей.

Для того чтобы одноточечное множество $\{x\}$ в отделимом пространстве E было разреженным, необходимо и достаточно, чтобы x не было в E изолированной точкой. Граница открытого (или замкнутого) множества есть разреженное множество; однако граница произвольного множества — не обязательно разреженная. Всюду плотное множество не может быть разреженным. В числовом пространстве $\mathbf{R}^n$ всякое линейное многообразие размерности $<n$ разреженное.

Всякое подмножество разреженного множества есть разреженное множество. Объединение локально конечного семейства разреженных множеств есть разреженное множество.

16. Множество A в топологическом пространстве E называют *тощим*, если оно является объединением счетного семейства разреженных множеств или, иначе, если содержится в объединении

счетного семейства замкнутых множеств, не имеющих внутренних точек. Пространство само может быть тощим, например когда оно счетно и не имеет изолированных точек, как рациональная прямая Q.

Всякое подмножество тощего множества есть тощее множество; объединение всякого счетного семейства тощих множеств есть тощее множество.

17. Топологическое пространство E называется *бэровским пространством*, если оно удовлетворяет любому из следующих четырех (равносильных) условий:

(EB) *Пересечение всякого счетного семейства всюду плотных открытых множеств всюду плотно.*

(EB′) *Для каждого счетного семейства* (F_n) *замкнутых множеств в* E, *объединение которого имеет внутреннюю точку, по крайней мере одно из* F_n *имеет внутреннюю точку.*

(EB″) *Никакое непустое открытое множество не является тощим.*

(EB‴) *Дополнение всякого тощего множества всюду плотно.*

Всякое локально компактное пространство — бэровское. Всякое пространство E, в котором существует метрика, согласующаяся с его топологией и такая, что E в этой метрике полно, есть бэровское пространство (*теорема Бэра*) (гл. IX, § 5, теорема 1).

В бэровском пространстве всякое открытое подпространство, а также дополнение всякого тощего множества есть бэровское пространство. Если всякая точка топологического пространства E обладает окрестностью, являющейся бэровским пространством, то E — бэровское пространство.

§ 2. Фильтры и пределы

1. *Фильтром* в множестве E называют множество $\mathfrak{F}$ подмножеств из E, обладающее следующими свойствами:

(F_I) *Всякое множество, содержащее множество из* $\mathfrak{F}$, *принадлежит* $\mathfrak{F}$.

(F_{IIa}) *Пересечение всяких двух множеств из* $\mathfrak{F}$ *принадлежит* $\mathfrak{F}$.

($F_{IIб}$) *Множество* E *принадлежит* $\mathfrak{F}$.

(F_{III}) *Пустое подмножество множества* E *не принадлежит* $\mathfrak{F}$.

Множество E, наделенное структурой, определяемой заданием в нем фильтра, называется *фильтрующимся множеством*.

2. Если E — бесконечное множество, то дополнения его конечных подмножеств образуют фильтр в E. Когда E — множество N неотрицательных целых чисел, этот фильтр называют *фильтром Фреше*.

В топологическом пространстве E множество всех окрестностей непустого множества есть фильтр.

Если E — непустое равномерное пространство, то множество его окружений есть фильтр в $E \times E$.

3. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ — фильтры в одном и том же множестве E, то говорят, что $\mathfrak{F}'$ *мажорирует* $\mathfrak{F}$, или что $\mathfrak{F}$ *мажорируется* $\mathfrak{F}'$, если $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$; если, кроме того, $\mathfrak{F}' \neq \mathfrak{F}$, то говорят, что $\mathfrak{F}'$ *сильнее*, чем $\mathfrak{F}$, или что $\mathfrak{F}$ *слабее*, чем $\mathfrak{F}'$. Два фильтра, один из которых мажорирует другой, называются *сравнимыми*.

Пересечение произвольного семейства $(\mathfrak{F}_\iota)$ фильтров в E есть фильтр; он служит нижней гранью семейства $(\mathfrak{F}_\iota)$ в упорядоченном множестве всех фильтров в E.

4. Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторое множество подмножеств множества E; для того чтобы существовал фильтр, содержащий $\mathfrak{G}$, необходимо и достаточно, чтобы пересечение всякого конечного семейства множеств из $\mathfrak{G}$ было не пусто. Если $\mathfrak{G}'$ — множество всех этих пересечений, то наименьшим фильтром, содержащим $\mathfrak{G}$, будет множество $\mathfrak{G}''$ всех множеств в E, содержащих хотя бы одно множество из $\mathfrak{G}'$; $\mathfrak{G}''$ называется фильтром, *порождаемым* множеством $\mathfrak{G}$.

Для того чтобы множество Φ фильтров в E обладало верхней гранью (в упорядоченном множестве всех фильтров в E), необходимо и достаточно, чтобы для каждой конечной последовательности $(\mathfrak{F}_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ фильтров, принадлежащих Φ, пересечение $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ не было пусто ни для какого набора множеств $A_k \in \mathfrak{F}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

5. Множество $\mathfrak{B}$ подмножеств множества E называется *базисом фильтра* в E, если множество всех подмножеств из E, содержащих хотя бы одно множество из $\mathfrak{B}$, есть фильтр (он называется *фильтром с базисом* $\mathfrak{B}$); для того чтобы $\mathfrak{B}$ было базисом фильтра, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{B}$ обладало следующими свойствами:

(B_I) *Пересечение всяких двух множеств из* $\mathfrak{B}$ *содержит множество из* $\mathfrak{B}$.

(B_{II}) $\mathfrak{B}$ *не пусто и пустое подмножество множества* E *не принадлежит* $\mathfrak{B}$.

Два базиса фильтра в E, порождающие один и тот же фильтр, называются *эквивалентными*.

Для того чтобы подмножество $\mathfrak{B}$ фильтра $\mathfrak{F}$ было базисом этого фильтра, необходимо и достаточно, чтобы всякое множество из $\mathfrak{F}$ содержало множество из $\mathfrak{B}$.

Для того чтобы фильтр с базисом $\mathfrak{B}'$ в E мажорировал фильтр с базисом $\mathfrak{B}$, необходимо и достаточно, чтобы всякое множество из $\mathfrak{B}$ содержало множество из $\mathfrak{B}'$.

6. Пусть E — множество, упорядоченное некоторым отношением порядка x (σ) y и фильтрующееся (*вправо*) по этому отношению; сопоставим каждому $x \in E$ множество S_x тех $y \in E$, для которых x (σ) y (*сечение* E относительно x). Множества S_x образуют базис фильтра в E; порождаемый им фильтр называется *фильтром сечений* в E. Фильтр Фреше есть фильтр сечений $\mathbf{N}$ (по отношению $\leqslant$).

7. Фильтр в множестве E называется *ультрафильтром*, если в E нет более сильного фильтра.

Каков бы ни был фильтр $\mathfrak{F}$ в E, существует мажорирующий его ультрафильтр (гл. I, 2-е изд., § 5, теорема 2; 3-е изд., § 6, теорема 1).

Множество всех подмножеств множества E, содержащих фиксированный элемент $a \in E$, есть ультрафильтр.

Если $\mathfrak{F}$ — ультрафильтр в E и объединение конечной последовательности $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ подмножеств множества E принадлежит $\mathfrak{F}$, то хотя бы одно из A_i принадлежит $\mathfrak{F}$.

8. Пусть A — непустое подмножество множества E. Для того чтобы след $\mathfrak{F}_A$ на A фильтра $\mathfrak{F}$ из E был фильтром в A, необходимо и достаточно, чтобы всякое множество из $\mathfrak{F}$ пересекалось с A. Фильтр $\mathfrak{F}_A$ называется тогда фильтром, *индуцируемым* в A фильтром $\mathfrak{F}$.

Для того чтобы ультрафильтр $\mathfrak{F}$ в E индуцировал фильтр в множестве $A \subset E$, необходимо и достаточно, чтобы $A \in \mathfrak{F}$; тогда $\mathfrak{F}_A$ является ультрафильтром в A.

Пусть E — топологическое пространство; для того чтобы след фильтра окрестностей точки $x_0 \in E$ на непустом множестве $A \subset E$ был фильтром, необходимо и достаточно, чтобы x_0 было точкой прикосновения множества A.

9. Пусть f — отображение множества E в множество F. Для каждого базиса фильтра $\mathfrak{B}$ в E $f(\mathfrak{B})$ есть базис фильтра в F. Если $\mathfrak{B}$ — базис ультрафильтра в E, то $f(\mathfrak{B})$ — базис ультрафильтра в F.

Пусть $\mathfrak{B}'$ — базис фильтра в F; для того чтобы $f^{-1}(\mathfrak{B}')$ было базисом фильтра в E, необходимо и достаточно, чтобы всякое множество из $\mathfrak{B}'$ пересекалось с $f(E)$. Это условие, в частности, выполняется, если $\mathfrak{B}' = f(\mathfrak{B})$; тогда $f^{-1}(f(\mathfrak{B}))$ порождает фильтр, мажорируемый фильтром с базисом $\mathfrak{B}$.

10. Пусть $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ — бесконечная последовательность элементов множества E. Его подмножества, содержащие все члены последовательности, за исключением конечного их числа, образуют фильтр в E, называемый *элементарным фильтром, ассоциированным с последовательностью* (x_n); это — фильтр, имеющий базисом образ фильтра Фреше при отображении $n \mapsto x_n$ множества $\mathbf{N}$ в E.

Элементарный фильтр, ассоциированный с подпоследовательностью последовательности (x_n), мажорирует элементарный фильтр, ассоциированный с (x_n).

Всякий элементарный фильтр обладает счетным базисом. Фильтр, обладающий счетным базисом, является пересечением мажорирующих его элементарных фильтров.

11. Говорят, что точка x_0 в топологическом пространстве E есть *предел* базиса фильтра $\mathfrak{B}$ (или что $\mathfrak{B}$ *сходится к* x_0), если фильтр с базисом $\mathfrak{B}$ мажорирует фильтр окрестностей точки x_0, т. е. если всякая ее окрестность содержит некоторое множество из $\mathfrak{B}$.

Говорят, что a есть *точка прикосновения* базиса фильтра $\mathfrak{B}$, если a является точкой прикосновения каждого множества из $\mathfrak{B}$, т. е., другими словами, если всякая окрестность точки a пересекается со всеми множествами из $\mathfrak{B}$.

Базис фильтра $\mathfrak{B}$ в равномерном пространстве E называется *базисом фильтра Коши*, если для каждого окружения V для E

существует множество $M \in \mathfrak{B}$ *малое порядка* V, т. е. такое множество M, что $(x, y) \in V$ для всякой пары точек x, y из M.

Если E — метрическое пространство, то для того, чтобы базис фильтра $\mathfrak{B}$ в E был базисом фильтра Коши, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ в $\mathfrak{B}$ существовало множество с диаметром $\leqslant \varepsilon$.

12. В топологическом пространстве E всякий фильтр, мажорирующий фильтр, сходящийся к x_0, также сходится к x_0; пересечение любого семейства фильтров, сходящихся к x_0, сходится к x_0.

В отделимом пространстве фильтр не может иметь более одного предела.

Предел фильтра является точкой прикосновения этого фильтра. В отделимом пространстве фильтр, сходящийся к точке x_0, имеет единственную точку прикосновения, а именно x_0. Обратно, в компактном пространстве фильтр, имеющий только одну точку прикосновения, сходится к этой точке (гл. 1, 2-е изд., § 10, следствие теоремы 1; 3-е изд., § 9, следствие теоремы 1).

В компактном пространстве всякий ультрафильтр сходится.

13. Для того чтобы фильтр $\mathfrak{F}$ в произведении $E = \prod_\iota E_\iota$ топологических пространств сходился к точке $a = (a_\iota)$, необходимо и достаточно, чтобы проекция $\mathrm{pr}_\iota \mathfrak{F}$ сходилась к a_ι при всяком ι.

Пусть R — открытое отношение эквивалентности в топологическом пространстве E и φ — каноническое отображение E на E/R. Для того чтобы базис фильтра $\mathfrak{B}'$ в факторпространстве E/R сходился к точке a, необходимо и достаточно, чтобы в E существовал базис фильтра $\mathfrak{B}$, сходящийся к какой-либо точке x, каноническим образом $\varphi(x)$ которой служит a, и такой, что базис фильтра $\varphi(\mathfrak{B})$ эквивалентен $\mathfrak{B}'$.

14. Для того чтобы точка a топологического пространства E была точкой прикосновения фильтра $\mathfrak{F}$, необходимо и достаточно, чтобы существовал фильтр, мажорирующий $\mathfrak{F}$ и сходящийся к a. Точка прикосновения фильтра $\mathfrak{F}$ является точкой прикосновения всякого фильтра, мажорируемого $\mathfrak{F}$. Множество всех точек прикосновения фильтра $\mathfrak{F}$ замкнуто.

В компактном пространстве всякий фильтр имеет по крайней мере одну точку прикосновения. При этом всякая окрестность

множества A всех точек прикосновения фильтра $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$ (гл I, 2-е изд., § 10, теорема 1; 3-е изд., § 9, теорема 1).

15. В равномерном пространстве всякий сходящийся фильтр есть фильтр Коши. Всякий фильтр Коши, имеющий точку прикосновения, сходится к этой точке. В полном равномерном пространстве всякий фильтр Коши сходится.

Для того чтобы фильтр в произведении равномерных пространств был фильтром Коши, необходимо и достаточно, чтобы каждая из его проекций была фильтром Коши.

16. Пусть E — множество, фильтрующееся по фильтру $\mathfrak{F}$, F — топологическое пространство и f — отображение E в F. Точка $y_0 \in F$ называется *пределом* (соотв. *предельной точкой*) функции f по фильтру $\mathfrak{F}$, если y_0 есть предел (соотв. точка прикосновения) базиса фильтра $f(\mathfrak{F})$. Это означает еще, что для каждой окрестности V точки y_0 существует множество $M \in \mathfrak{F}$ такое, что $f(M) \subset V$ (соотв. что для каждой окрестности V точки y_0 и каждого $M \in \mathfrak{F}$ множества $f(M)$ и V пересекаются). Если y_0 есть предел f по фильтру $\mathfrak{F}$, то пишут:

$$y_0 = \lim_{\mathfrak{F}} f \text{ или } y_0 = \lim_{\mathfrak{F}} f(x).$$

17. Если y_0 — предел f по $\mathfrak{F}$, то y_0 есть предел f и по любому фильтру, мажорирующему $\mathfrak{F}$. Если F отделимо, то f не может иметь более одного предела по $\mathfrak{F}$.

Если F компактно, то всякая функция f имеет по крайней мере одну предельную точку по $\mathfrak{F}$; при этом, если эта предельная точка единственная, то она является пределом f по $\mathfrak{F}$. Если F компактно, то f имеет предел по каждому ультрафильтру $\mathfrak{F}$.

Если F — полное равномерное пространство, то для того, чтобы функция f имела предел по $\mathfrak{F}$, необходимо и достаточно, чтобы $f(\mathfrak{F})$ было базисом фильтра Коши.

18. Точка a называется *пределом* (соотв. *предельной точкой*) *последовательности* (x_n) точек топологического пространства E, если a есть предел (соотв. предельная точка) отображения $n \to x_n$ по фильтру Фреше (или элементарного фильтра, ассоциированного с данной последовательностью); это означает, что для каждой окрестности V точки a существует n_0 такое, что $x_n \in V$ для всех $n \geqslant n_0$ (соотв. что для каждой окрестности V точки a и каждого

n_0 существует $n \geqslant n_0$ такое, что $x_n \in V$). Если a есть предел последовательности (x_n), то пишут $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и говорят, что последовательность (x_n) *сходится к* a.

Последовательность (x_n) в равномерном пространстве E называют *последовательностью Коши*, если ассоциированный с нею элементарный фильтр есть фильтр Коши; это означает, что, каково бы ни было окружение U для E, существует n_0 такое, что $(x_m, x_n) \in U$ для всех $m \geqslant n_0$ и $n \geqslant n_0$. Для того чтобы последовательность (x_n) точек метрического пространства E (с расстоянием d) была последовательностью Коши, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало n_0 такое, что $d(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon$, каковы бы ни были $m \geqslant n_0$ и $n \geqslant n_0$. Для того чтобы последовательность (x_n) сходилась к точке a, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало n_0 такое, что $d(a, x_n) \leqslant \varepsilon$, каково бы ни было $n \geqslant n_0$ (т. е. чтобы последовательность $d(a, x_n)$ в $\mathbf{R}$ сходилась к нулю). Для того чтобы точка b была точкой прикосновения множества $A \subset E$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность (x_n) точек из A, сходящаяся к b.

19. Пусть A — фильтрующееся множество, $\mathfrak{F}$ — его фильтр сечений и f — отображение A в топологическое пространство E; если f имеет предел a по $\mathfrak{F}$, то вместо $a = \lim_{\mathfrak{F}} f(x)$ часто пишут $a = \lim\limits_{x\in A} f(x)$, и говорят, что a есть *предел* $f(x)$ *по фильтрующемуся множеству* A.

20. Пусть E и F — топологические пространства, a — точка прикосновения множества $A \subset E$, и f — отображение A в F. Говорят, что точка $b \in F$ есть *предел* $f(x)$, *когда* x *стремится к* a, *оставаясь в* A (или предел f в a *относительно* A), если b есть предел f по фильтру, индуцируемому в A фильтром окрестностей точки a; пишут: $b = \lim\limits_{x\to a,\ x\in A} f(x)$. Если такой предел b существует, то он является также пределом f в точке a относительно любого множества $B \subset A$ такого, что $a \in \overline{B}$; обратно, если V — окрестность точки a и f имеет предел в a относительно $V \cap A$, то этот предел будет также пределом f в a относительно A.

Если A — окрестность точки a, то вместо $\lim_{x\to a,\ x\in A} f(x)$ пишут $\lim_{x\to a} f(x)$ (существование предела относительно некоторой окрестности точки a влечет его существование относительно всякой другой окрестности, а также совпадение этих пределов, когда F отделимо). Непрерывность f в точке a означает, что $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

Пусть G — множество, фильтрующееся по фильтру $\mathfrak{G}$, и f — отображение G в топологическое пространство E; если f имеет предел a по $\mathfrak{G}$ и g — отображение E в топологическое пространство F, непрерывное в точке a, то $g \circ f$ имеет предел $g(a)$ по $\mathfrak{G}$.

Пусть E и F — равномерные пространства и f — равномерно непрерывное отображение E в F; образ всякого базиса фильтра Коши из E при отображении f есть базис фильтра Коши в F.

Пусть A — произвольное множество, E' — метрическое пространство и f — отображение A в E'; *колебанием f на A* называют диаметр $\delta(f(A))$ множества $f(A)$. Если A — множество в топологическом пространстве E и x_0 — его точка прикосновения, то *колебанием f в точке x_0* называют число $\omega(x_0; f) = \inf \delta(f(A \cap V))$, где V пробегает фильтр окрестностей точки x_0 в E. Для того чтобы f имело предел в x_0 относительно A, необходимо, чтобы его колебание в точке x_0 было равно нулю; если E' полно, то это условие также достаточно.

21. Пусть f и g — числовые функции (конечные или нет), определенные на множестве E, фильтрующемся по фильтру $\mathfrak{F}$. Если $\lim_{\mathfrak{F}} f$ и $\lim_{\mathfrak{F}} g$ существуют и $f \leqslant g$, то также $\lim_{\mathfrak{F}} f \leqslant \lim_{\mathfrak{F}} g$ (*принцип продолжения неравенств*).

Пусть A — фильтрующееся упорядоченное множество и $\mathfrak{G}$ — его фильтр сечений. Всякая возрастающая числовая функция на A (конечная или нет) имеет предел по $\mathfrak{G}$, равный ее верхней грани на A (*теорема о пределе монотонной функции*).

22. Пусть f — числовая функция (конечная или нет), определенная на множестве E, фильтрующемся по фильтру $\mathfrak{F}$. Отображение $X \mapsto \sup_{x\in X} f(x)$ (соотв. $X \mapsto \inf_{x\in X} f(x)$) фильтра $\mathfrak{F}$ в $\overline{\mathbf{R}}$ — убывающее (соотв. возрастающее) в $\mathfrak{F}$, упорядоченном по вклю-

чению. Обозначим через $\lim\sup_{\mathfrak{F}} f$ или $\lim\sup_{\mathfrak{F}} f(x)$ (соотв. $\lim\inf_{\mathfrak{F}} f$ или $\lim\inf_{\mathfrak{F}} f(x)$) предел отображения $X \mapsto \sup_{x\in X} f(x)$ (соотв. $X \mapsto \inf_{x\in X} f(x)$) по фильтру сечений фильтра $\mathfrak{F}$ (рассматриваемого как множество, фильтрующееся по отношению $\supset$); это число называют *верхним* (соотв. *нижним*) *пределом* функции f по $\mathfrak{F}$. Имеем

$$\inf_{x\in E} f(x) \leqslant \lim\inf_{\mathfrak{F}} f \leqslant \lim\sup_{\mathfrak{F}} f \leqslant \sup_{x\in E} f(x)$$

и

$$\lim\inf_{\mathfrak{F}} f = -(\lim\sup_{\mathfrak{F}} (-f)).$$

23. Верхний предел числовой функции f по фильтру $\mathfrak{F}$ есть верхняя грань множества предельных точек f по $\mathfrak{F}$. Для того чтобы $\lim\sup_{\mathfrak{F}} f = \lim\inf_{\mathfrak{F}} f$, необходимо и достаточно, чтобы функция f имела предел по $\mathfrak{F}$, и тогда $\lim_{\mathfrak{F}} f = \lim\sup_{\mathfrak{F}} f = \lim\inf_{\mathfrak{F}} f$. Если фильтр $\mathfrak{G}$ мажорирует $\mathfrak{F}$, то

$$\lim\inf_{\mathfrak{F}} f \leqslant \lim\inf_{\mathfrak{G}} f \leqslant \lim\sup_{\mathfrak{G}} f \leqslant \lim\sup_{\mathfrak{F}} f.$$

24. Если f и g — числовые функции, определенные на множестве E, фильтрующемся по фильтру $\mathfrak{F}$, то $f \leqslant g$ влечет $\lim\sup_{\mathfrak{F}} f \leqslant \lim\sup_{\mathfrak{F}} g$ и $\lim\inf_{\mathfrak{F}} f \leqslant \lim\inf_{\mathfrak{F}} g$. Для любых двух числовых функций f и g справедливы неравенства

$$\lim\sup_{\mathfrak{F}} (f+g) \leqslant \lim\sup_{\mathfrak{F}} f + \lim\sup_{\mathfrak{F}} g,$$

$$\lim\sup_{\mathfrak{F}} f + \lim\inf_{\mathfrak{F}} g \leqslant \lim\sup_{\mathfrak{F}} (f+g),$$

в предположении, что обе части неравенства имеют смысл.

25. Смысл обозначений $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup x_n$, $\lim\limits_{x\to a,\, x\in A}\sup f(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\sup f(x)$ определяется так же, как в n°n° 18 и 20, и аналогично для нижних пределов. Если A и B — множества в топологическом пространстве E такие, что $B \subset A$, и $a \in \overline{B}$, то для каждой числовой функции f, определенной на A, выполняются неравенства

$$\lim_{x\to a,\, x\in A}\inf f(x) \leqslant \lim_{x\to a,\, x\in B}\inf f(x) \leqslant \lim_{x\to a,\, x\in B}\sup f(x) \leqslant \lim_{x\to a,\, x\in A}\sup f(x).$$

Если $a \in \overline{A}$ и V — окрестность точки a в E, то

$$\lim_{x\to a,\, x\in V\cap A}\sup f(x) = \lim_{x\to a,\, x\in A}\sup f(x).$$

Если f определена в некоторой окрестности точки a, то

$$\liminf_{x\to a} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \limsup_{x\to a} f(x).$$

Для того чтобы числовая функция f, определенная на E, была полунепрерывна снизу (соотв. сверху) в точке a, необходимо и достаточно, чтобы $\liminf_{x\to a} f(x) \geqslant f(a)$ (соотв. $\limsup_{x\to a} f(x) \leqslant f(a)$).

Для того чтобы функция f была непрерывна в точке a, необходимо и достаточно, чтобы $\liminf_{x\to a} f(x) = \limsup_{x\to a} f(x)$.

26. Пусть E_1 и E_2 — множества, фильтрующиеся соответственно по фильтрам $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Обозначим через $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ фильтр в $E_1 \times E_2$, имеющий базисом множество всех произведений $A_1 \times A_2$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ и $A_2 \in \mathfrak{F}_2$ (*произведение фильтров* $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$).

Пусть f — функция, определенная на $E_1 \times E_2$, со значениями в регулярном пространстве F и f_{x_1} для каждого x_1 — отображение $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ множества E_2 в F. Предположим, что выполнены следующие условия: а) существует $\lim_{\mathfrak{F}_1\times\mathfrak{F}_2} f(x_1, x_2)$; б) для каждого $x_1 \in E_1$ существует $\lim_{\mathfrak{F}_2} f_{x_1} = g(x_1)$. Тогда $\lim_{\mathfrak{F}_1} g(x_1)$ существует и равен $\lim_{\mathfrak{F}_1\times\mathfrak{F}_2} f(x_1, x_2)$ (*теорема о двойном пределе*) (гл. I, 2-е изд., § 8, предложение 8; 3-е изд., § 8, следствие теоремы 1).

§ 3. Равномерные пространства; метрические пространства

1. Пусть дано множество E; говорят, что фильтр $\mathfrak{U}$ в $E \times E$ определяет *равномерную структуру* в E, если он обладает следующими свойствами:

(U_I) *Всякое множество из* $\mathfrak{U}$ *содержит диагональ* Δ.

(U_{II}) $V \in \mathfrak{U}$ *влечет* $V^{-1} \in \mathfrak{U}$.

(U_{III}) *Для каждого* $V \in \mathfrak{U}$ *существует* $W \in \mathfrak{U}$ *такое, что* $W \circ W \subset V$.

Множества $U \in \mathfrak{U}$ называются *окружениями* равномерной структуры, определяемой фильтром $\mathfrak{U}$.

Если E — непустое множество, то подмножества произведения $E \times E$, содержащие диагональ Δ, образуют фильтр окружений

равномерной структуры в E, которая называется *дискретной равномерной структурой*.

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ — равномерные структуры в множествах E и E'. Для того чтобы биективное отображение $f\colon E \to E'$ было изоморфизмом $\mathcal{U}$ на $\mathcal{U}'$, необходимо и достаточно, чтобы образом фильтра окружений для $\mathcal{U}$ относительно распространения f на $E \times E$ служил фильтр окружений для $\mathcal{U}'$, или, что то же, чтобы отображения f и f^{-1} были равномерно непрерывны.

2. *Фундаментальной системой окружений* равномерной структуры называют любой базис фильтра окружений этой структуры. Для того чтобы базис фильтра $\mathfrak{S}$ в $E \times E$ был фундаментальной системой окружений равномерной структуры в E, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял следующим аксиомам:

(U'_{I}) *Всякое множество из* $\mathfrak{S}$ *содержит диагональ* Δ.

($\mathrm{U}'_{\mathrm{II}}$) *Для каждого* $V \in \mathfrak{S}$ *существует* $V' \in \mathfrak{S}$ *такое, что* $V' \subset \overset{-1}{V}$.

($\mathrm{U}'_{\mathrm{III}}$) *Для каждого* $V \in \mathfrak{S}$ *существует* $W \in \mathfrak{S}$ *такое, что* $W \circ W \subset V$.

Окружение V равномерной структуры называют *симметричным*, если $V = \overset{-1}{V}$. Симметричные окружения образуют фундаментальную систему окружений.

Для каждого целого $n > 0$ и каждого множества $V \subset E \times E$ определим $\overset{n}{V}$, полагая $\overset{n}{V} = V \circ \overset{n-1}{V}$; когда V пробегает фундаментальную систему окружений, также множества $\overset{n}{V}$ при любом целом n образуют фундаментальную систему окружений.

3. *Отклонением* на множестве E называют всякое отображение f произведения $E \times E$ в $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty]$, удовлетворяющее следующим условиям:

(EC_{I}) $f(x, x) = 0$ *для всякого* $x \in E$.

($\mathrm{EC}_{\mathrm{II}}$) $f(x, y) = f(y, x)$ *для всех* $x \in E$ *и* $y \in E$.

($\mathrm{EC}_{\mathrm{III}}$) *Каковы бы ни были* $x \in E$, $y \in E$ *и* $z \in E$,

$$f(x, y) \leqslant f(x, z) + f(z, y)$$

(*неравенство треугольника*).

Отклонение d называют *расстоянием*, если все его значения конечны и $d(x, y) = 0$ влечет $x = y$.

Для всякой конечной числовой функции g, определенной на E, функция $f(x, y) = |g(x) - g(y)|$ есть отклонение на E. Функция $d(x, y)$, равная 1 при $x \neq y$ и равная 0 при $x = y$, является расстоянием. На пространстве $\mathbf{R}^n$ функция $d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$ есть расстояние (евклидово расстояние).

4. Пусть $(f_\iota)_{\iota \in I}$ — произвольное семейство отклонений на множестве E. Для каждого целого $n > 0$, каждого семейства n индексов $(\iota_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ из I и каждого семейства n положительных чисел $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ обозначим через $V((\iota_k), (a_k))$ множество всех пар (x, y) элементов из E таких, что $f_{\iota_k}(x, y) < a_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Множество $\mathfrak{S}$ подмножеств $V((\iota_k), (a_k))$ произведения $E \times E$ является фундаментальной системой окружений некоторой равномерной структуры в E; она называется равномерной структурой, *определяемой семейством отклонений* $(f_\iota)_{\iota \in I}$.

Всякая равномерная структура может быть определена семейством отклонений (гл. IX, § 1, теорема 1); два семейства отклонений в одном и том же множестве E называются *эквивалентными*, если они определяют одну и ту же равномерную структуру.

5. Пусть E — множество, наделенное равномерной структурой $\mathcal{U}$, и $\mathfrak{V}(x)$ для каждой точки $x \in E$ — множество всех $V(x) \subset E$, где V пробегает фильтр окружений структуры $\mathcal{U}$; существует, и притом единственная, топология $\mathcal{T}$, в которой $\mathfrak{V}(x)$ является фильтром окрестностей x для каждой точки $x \in E$. Говорят, что топология $\mathcal{T}$ *порождена* равномерной структурой $\mathcal{U}$, а множество E, наделенное топологией $\mathcal{T}$ и равномерной структурой $\mathcal{U}$, называют *равномерным пространством*.

При наделении множества $E \times E$ произведением топологии $\mathcal{T}$ на себя всякое окружение структуры $\mathcal{U}$ является окрестностью диагонали Δ; внутренности и замыкания (в $E \times E$) всевозможных окружений структуры $\mathcal{U}$ образуют фундаментальную систему окружений для $\mathcal{U}$. $V(A)$ для любого множества $A \subset E$ и любого окружения V структуры $\mathcal{U}$ есть окрестность множества A; она открыта в E, если V открыто в $E \times E$. Для каждого множества $A \subset E$ пересечение всех $V(A)$, где V пробегает фундаментальную систему окружений структуры $\mathcal{U}$, совпадает с его замыканием $\overline{A}$ в E.

Для того чтобы топология $\mathcal{U}$ была отделима, необходимо и достаточно, чтобы равномерная структура $\mathcal{U}$ удовлетворяла следующей аксиоме:

(U_{III}) *Пересечение всех окружений структуры* $\mathcal{U}$ *совпадает с диагональю* Δ.

В этом случае говорят, что равномерная структура $\mathcal{U}$ *отделима*.

6. Говорят, что топология $\mathcal{T}$ и равномерная структура $\mathcal{U}$ в множестве E *согласуются*, если $\mathcal{T}$ совпадает с топологией, которую порождает $\mathcal{U}$. Топологическое пространство называют *равномеризуемым*, если существует хотя бы одна равномерная структура, согласующаяся с его топологией (может существовать не только одна).

Для того чтобы топологическое пространство E было равномеризуемым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая аксиома:

(O_{IV}) *Каковы бы ни были точка* $x_0 \in E$ *и ее окрестность* V, *на* E *существует непрерывная числовая функция со значениями в интервале* $[0, 1]$, *равная* 1 *в точке* x_0 *и* 0 *на множестве* $\complement V$ (гл. IX, § 1, теорема 2).

Всякое компактное пространство равномеризуемо, причем в этом случае существует только одна равномерная структура, согласующаяся с его топологией (гл. II, § 4, теорема 1). Эта структура имеет окружениями все окрестности диагонали в $E \times E$, причем фундаментальную систему окружений можно получить следующим образом: для каждого конечного открытого покрытия $\mathfrak{R} = (A_\iota)$ пространства E образуем в $E \times E$ объединение $V_{\mathfrak{R}}$ всех множеств $A_\iota \times A_\iota$; тогда множества $V_{\mathfrak{R}}$ образуют фундаментальную систему окружений равномерной структуры пространства E.

Всякое локально компактное пространство равномеризуемо; но вообще существуют различные равномерные структуры, согласующиеся с его топологией; так, например, обстоит дело для числовых пространств $\mathbf{R}^n$.

Всякое подпространство равномеризуемого пространства равномеризуемо; произведение всякого семейства равномеризуемых пространств равномеризуемо.

7. *Метрическим пространством* называют множество E, наделенное структурой, определяемой заданием на E некоторого расстояния; метрическое пространство E всегда считается наделенным также равномерной структурой и топологией, определяемыми заданным на E расстоянием d. Пусть E и E' — метрические пространства, а d (соотв. d') — расстояние на E (соотв. на E'). Отображение f пространства E на E' называют *изометрией*, если $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$, каковы бы ни были точки $x \in E$ и $y \in E$.

Расстоянием между множествами A и B в E называют число $d(A, B) = \inf\limits_{x \in A,\ y \in B} d(x, y)$; когда B сводится к одной точке x, вместо $d(\{x\}, A)$ пишут $d(x, A)$ и это число называют *расстоянием точки x до множества A*; функция $x \mapsto d(x, A)$ равномерно непрерывна на E. Для каждого $\alpha > 0$ множество $V_\alpha(A)$ (соотв. $W_\alpha(A)$) тех точек x, для которых $d(x, A) < \alpha$ (соотв. $d(x, A) \leqslant \alpha$), есть открытая (соотв. замкнутая) окрестность множества A; замыканием множества A служит множество всех точек $x \in E$, для которых $d(x, A) = 0$.

В частности, для каждой точки $x \in E$ множество $V_\alpha(x)$ (соотв. $W_\alpha(x)$) называют *открытым* (соотв. *замкнутым*) *шаром с центром x и радиусом α*; это — открытое (соотв. замкнутое) множество. Множество всех точек $y \in E$, для которых $d(x, y) = \alpha$, называется *сферой* с центром x и радиусом α; это — замкнутое множество (которое может быть и пустым).

Диаметром множества $A \subset E$ называют число

$$\delta(A) = \sup_{x \in A,\ y \in A} d(x, y).$$

Для того чтобы непустое множество A сводилось к одной точке, необходимо и достаточно, чтобы $\delta(A) = 0$. Множество называется *ограниченным* (по расстоянию d), если его диаметр конечен.

8. Равномерную структуру в множестве E называют *метризуемой*, если она может быть определена посредством расстояния. Для того чтобы равномерная структура была метризуемой, необходимо и достаточно, чтобы она была отделимой и фильтр ее окружений обладал счетным базисом (гл. IX, § 2, теорема 1). Отделимая равномерная структура, определяемая счетным семейством отклонений, метризуема; в частности, произведение счетного семейства метризуемых равномерных структур метризуемо.

Дискретная равномерная структура в любом множестве E метризуема: она определяется расстоянием d_0 таким, что $d_0(x, y) = 1$ при $x \neq y$ и $d_0(x, x) = 0$. Топология, порождаемая равномерной структурой, дискретна.

9. Топологическое пространство E называют *метризуемым*, если его топологию можно задать расстоянием. Метризуемое пространство равномеризуемо, но могут существовать различные метризуемые равномерные структуры, согласующиеся с его топологией (иными словами, неэквивалентные расстояния, определяющие топологию пространства E), а также неметризуемые равномерные структуры, согласующиеся с его топологией.

Всякое метризуемое пространство паракомпактно (гл. IX, § 4, теорема 4). В метризуемом пространстве всякая точка обладает счетной фундаментальной системой окрестностей и каждое замкнутое множество есть пересечение счетного семейства открытых множеств. Эти необходимые условия метризуемости топологического пространства не являются достаточными.

10. Равномерное пространство E называют *полным*, если всякий фильтр Коши в E сходится.

Всякое замкнутое подпространство полного пространства полно. Всякое полное подпространство отделимого равномерного пространства (полного или нет) замкнуто.

Пусть A — всюду плотное подпространство равномерного пространства E. Если всякий базис фильтра Коши в A сходится в E, то E полно.

Для того чтобы произведение равномерных пространств было полно, необходимо и достаточно, чтобы каждое из этих пространств было полно.

Для того чтобы метрическое пространство E было полно, необходимо и достаточно, чтобы всякая последовательность Коши в E сходилась. Всякое полное метрическое пространство есть бэровское пространство (гл. IX, § 5, теорема 1).

Всякое компактное пространство полно (в своей единственной равномерной структуре).

11. Для каждого равномерного пространства E существуют полное отделимое равномерное пространство $\hat{E}$ и равномерно непрерывное отображение $i\colon E \to \hat{E}$ такие, что для всякого равно-

мерно непрерывного отображения f пространства E в полное отделимое равномерное пространство F существует, и притом единственное, равномерно непрерывное отображение g: $\hat{E} \to F$ такое, что $f = g \circ i$; при этом $\hat{E}$ и i определены с точностью до изоморфизма однозначно (гл. II, 3-е изд., § 3, теорема 3); $\hat{E}$ называется *отделимым пополнением* пространства E; подпространство $i(E)$ плотно в $\hat{E}$ и образы при отображении $i \times i$ окружений для E являются окружениями для $i(E)$, а замыкания последних в $\hat{E} \times \hat{E}$ образуют фундаментальную систему окружений для $\hat{E}$. Когда E отделимо, i инъективно, что позволяет отождествить E с $i(E)$; тогда $\hat{E}$ называется *пополнением* пространства E. Если равномерная структура пространства E задана семейством отклонений (f_ι), то на $\hat{E}$ существует, и притом единственное, семейство отклонений $(\overline{f}_\iota)$ такое, что $f_\iota = \overline{f}_\iota \circ (i \times i)$ для каждого ι и равномерная структура пространства $\hat{E}$ определяется семейством отклонений $(\overline{f}_\iota)$.

Отделимое пополнение подпространства A равномерного пространства E изоморфно замыканию $i(A)$ в $\hat{E}$.

Отделимое пополнение произведения равномерных пространств изоморфно произведению отделимых пополнений пространств сомножителей.

12. Равномерное пространство E называется *предкомпактным*, если его отделимое пополнение компактно. Множество $A \subset E$ называется *предкомпактным*, если A, рассматриваемое как равномерное подпространство пространства E, предкомпактно.

Для того чтобы равномерное пространство E было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы для каждого окружения V существовало конечное покрытие пространства E множествами малыми порядка V (гл. II, 2-е изд., § 4, теорема 4; 3-е изд., § 4, теорема 3).

Для того чтобы метрическое пространство E было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы в E для каждого $\varepsilon > 0$ существовало конечное число точек a_i таких, чтобы каждая точка из E отстояла от одной из точек a_i на расстояние $< \varepsilon$. Всякое предкомпактное метрическое пространство E обладает счетным базисом и счетным всюду плотным подмножеством.

Для того чтобы метризуемое пространство E было компактно, необходимо и достаточно, чтобы всякая последовательность (x_n) его точек имела в E предельную точку a; тогда из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к a.

§ 4. Сравнение топологий и равномерных структур

1. Пусть в одном и том же множестве E заданы топологические структуры $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$. Говорят, что $\mathcal{T}_1$ *мажорируется* $\mathcal{T}_2$ или что $\mathcal{T}_2$ *мажорирует* $\mathcal{T}_1$, если выполнено следующее условие:

а) Всякое множество, открытое в $\mathcal{T}_1$, открыто в $\mathcal{T}_2$.

Если при этом $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ различны, то говорят, что $\mathcal{T}_1$ *слабее* $\mathcal{T}_2$ или что $\mathcal{T}_2$ *сильнее* $\mathcal{T}_1$. Две топологии, из которых какая-нибудь одна мажорирует другую, называют *сравнимыми*.

Условие а) равносильно каждому из следующих условий:

б) Всякое множество, замкнутое в $\mathcal{T}_1$, замкнуто в $\mathcal{T}_2$.

в) Окрестность каждой точки $x_0 \in E$ в топологии $\mathcal{T}_1$ является ее окрестностью в топологии $\mathcal{T}_2$ (другими словами, фильтр окрестностей точки x_0 в топологии $\mathcal{T}_1$ мажорируется фильтром ее окрестностей в топологии $\mathcal{T}_2$).

г) Тождественное отображение множества E, наделенного топологией $\mathcal{T}_2$, на E, наделенное топологией $\mathcal{T}_1$, непрерывно.

2. Пусть $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ — топологии в E такие, что $\mathcal{T}_2$ мажорирует $\mathcal{T}_1$, и A — произвольное множество из E. Внутренность A в топологии $\mathcal{T}_1$ содержится во внутренности A в топологии $\mathcal{T}_2$, замыкание A в топологии $\mathcal{T}_1$ содержит замыкание A в топологии $\mathcal{T}_2$. В частности, если A всюду плотно при $\mathcal{T}_2$, то оно всюду плотно при $\mathcal{T}_1$.

3. Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр в топологическом пространстве E и $\mathcal{T}$ — топология этого пространства. Если a — предел (соотв. точка прикосновения) фильтра $\mathfrak{F}$ при топологии $\mathcal{T}$, то a есть предел (соотв. точка прикосновения) $\mathfrak{F}$ при всякой топологии, мажорируемой $\mathcal{T}$.

Пусть f — отображение пространства E в топологическое пространство E' и $\mathcal{T}'$ — топология последнего. Если f непрерывно при топологиях $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$, то оно остается непрерывным при замене

$\mathcal{T}$ топологией, мажорирующей $\mathcal{T}$, а $\mathcal{T}'$ — топологией, мажорируемой $\mathcal{T}'$.

4. Всякая топология, мажорирующая отделимую топологию, отделима. Напротив, топология может мажорировать метризуемую топологию, не будучи даже регулярной.

Если E — компактное пространство и $\mathcal{T}$ — его топология, то всякая отделимая топология в E, мажорируемая $\mathcal{T}$, необходимо совпадает с $\mathcal{T}$.

Если E связно в топологии $\mathcal{T}$, то оно связно и во всякой топологии, мажорируемой $\mathcal{T}$.

5. Множество Ω всевозможных топологий в множестве E упорядочено отношением «$\mathcal{T}$ мажорируется $\mathcal{T}'$». Всякое множество $\Phi \subset \Omega$ обладает нижней гранью — *пересечением* $\mathcal{J}$ всех топологий $\mathcal{T} \in \Phi$; для того чтобы множество было открыто в топологии $\mathcal{J}$, необходимо и достаточно по определению чтобы оно было открыто в каждой топологии из Φ.

6. Пусть $\mathfrak{S}$ — произвольное множество подмножеств множества E. Пересечение всех топологий в E, при которых все множества из $\mathfrak{S}$ открыты, называется топологией, *порожденной* множеством $\mathfrak{S}$. Если $\mathfrak{S}'$ — множество пересечений всевозможных конечных семейств множеств из $\mathfrak{S}$, а $\mathfrak{S}''$ — множество всевозможных объединений множеств из $\mathfrak{S}'$, то множество открыто в топологии, порождаемой $\mathfrak{S}$, тогда и только тогда, когда оно принадлежит $\mathfrak{S}''$.

Для того чтобы топология $\mathcal{T}$ в E порождалась множеством $\mathfrak{S}$ подмножеств множества E, необходимо и достаточно, чтобы всякое множество из $\mathfrak{S}$ было открыто в $\mathcal{T}$ и всякая окрестность V (в $\mathcal{T}$) произвольной точки $x_0 \in E$ содержала пересечение конечного числа множеств из $\mathfrak{S}$. Каждое множество $\mathfrak{B}$ открытых в $\mathcal{T}$ множеств, обладающее тем свойством, что всякое открытое в $\mathcal{T}$ множество является объединением множеств из $\mathfrak{B}$, называется *базисом* топологии $\mathcal{T}$. Для того чтобы $\mathfrak{B}$ было базисом топологии $\mathcal{T}$, необходимо и достаточно, чтобы всякая окрестность V произвольной точки $x_0 \in E$ содержала множество из $\mathfrak{B}$, содержащее x_0.

7. Всякое множество Φ топологий в E обладает *верхней гранью* $\mathcal{S}$: это топология, порождаемая множеством $\mathfrak{S}$ всех подмножеств множества E, открытых хотя бы в одной топологии $\mathcal{T} \in \Phi$.

Наибольший элемент в Ω — дискретная топология; наименьший — топология, в которой единственными открытыми множествами являются E и $\varnothing$.

8. Пусть $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ — равномерные структуры в одном и том же множестве E; говорят, что $\mathcal{U}_1$ *мажорируется* $\mathcal{U}_2$ или что $\mathcal{U}_2$ *мажорирует* $\mathcal{U}_1$, если всякое окружение для $\mathcal{U}_1$ есть окружение для $\mathcal{U}_2$ (или, другими словами, если фильтр окружений структуры $\mathcal{U}_1$ мажорируется фильтром окружений структуры $\mathcal{U}_2$). Если при этом $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ различны, то говорят, что $\mathcal{U}_1$ *слабее* $\mathcal{U}_2$ или что $\mathcal{U}_2$ *сильнее* $\mathcal{U}_1$. Две равномерные структуры называются *сравнимыми*, если одна какая-нибудь из них мажорирует другую.

Если $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ — равномерные структуры в одном и том же множестве E, то для того, чтобы $\mathcal{U}_1$ мажорировалась $\mathcal{U}_2$, необходимо и достаточно, чтобы тождественное отображение E, наделенного $\mathcal{U}_2$, на E, наделенное $\mathcal{U}_1$, было равномерно непрерывно.

9. Пусть $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ — равномерные структуры в одном и том же множестве E, а $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ — определенные ими топологии в E. Если $\mathcal{U}_1$ мажорируется $\mathcal{U}_2$, то $\mathcal{T}_1$ мажорируется $\mathcal{T}_2$; но $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ могут совпадать даже в случае, когда $\mathcal{U}_1$ слабее $\mathcal{U}_2$.

Если $\mathcal{U}_1$ мажорируется $\mathcal{U}_2$, то всякий фильтр Коши в $\mathcal{U}_2$ есть фильтр Коши в $\mathcal{U}_1$; при этом, если E, наделенное $\mathcal{U}_1$, полно и существует фундаментальная система окружений для $\mathcal{U}_2$, *замкнутых* в $E \times E$, наделенном произведением топологии $\mathcal{T}_1$ на себя, то E, наделенное $\mathcal{U}_2$, полно. Если E, наделенное $\mathcal{U}_2$, полно, и A — множество, всюду плотное в E (наделенном топологией $\mathcal{T}_2$), такое, что $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ индуцируют в нем одну и ту же равномерную структуру, то $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$.

10. Пусть E и E' — равномерные пространства, а $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ — их равномерные структуры. Равномерно непрерывное отображение E в E' остается равномерно непрерывным, если заменить $\mathcal{U}$ равномерной структурой, мажорирующей $\mathcal{U}$, а $\mathcal{U}'$ — равномерной структурой, мажорируемой $\mathcal{U}'$.

11. Множество Σ всевозможных равномерных структур в множестве E упорядочено отношением «$\mathcal{U}$ мажорируется $\mathcal{U}'$». Всякое множество $\Phi \subset \Sigma$ обладает *верхней гранью* $\mathcal{U}_0$; это — равномерная структура, фильтр окружений которой порождается объединением фильтров окружений всех равномерных структур $\mathcal{U} \in \Phi$.

Топология, которую порождает $\mathscr{U}_0$, есть верхняя грань топологий, порожденных равномерными структурами $\mathscr{U} \in \Phi$. Если $(\mathscr{U}_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство равномерных структур в E и $(f_{\iota\lambda})_{\lambda \in L_\iota}$ для каждого $\iota \in I$ — семейство отклонений, определяющих равномерную структуру $\mathscr{U}_\iota$, то верхней гранью семейства $(\mathscr{U}_\iota)$ служит равномерная структура, определяемая объединением всех семейств отклонений $(f_{\iota\lambda})$.

Наибольшим элементом семейства Σ является дискретная равномерная структура, наименьшим — равномерная структура, фильтр окружений которой состоит из одного множества $E \times E$.

§ 5. Аксиомы отделимости

1. Топологическое пространство E называется *отделимым* или *хаусдорфовым*, если выполняется следующая аксиома:

(H) *Для всяких двух различных точек x и y из E существуют окрестность точки x и окрестность точки y, не имеющие общих точек.*

Эта аксиома равносильна следующей:

(H′) *Пересечение всех замкнутых окрестностей каждой точки из E состоит из одной этой точки.*

В частности, в отделимом пространстве всякое одноточечное множество замкнуто.

Другое условие, равносильное (H), таково:

(H″) *Каково бы ни было множество I, диагональ произведения E^I является замкнутым множеством.*

2. В отделимом пространстве фильтр не может иметь более одного предела. Если фильтр $\mathscr{G}$ сходится к a, то a — единственная его точка прикосновения. Всякая функция, отображающая множество A, фильтрующееся по фильтру $\mathscr{G}$, в отделимое пространство, может иметь не более одного предела по $\mathscr{G}$.

3. Всякое подпространство отделимого пространства отделимо. Обратно, если всякая точка топологического пространства E обладает замкнутой окрестностью, являющейся его отделимым подпространством, то E отделимо. Произведение любого семейства отделимых пространств отделимо.

Для того чтобы факторпространство топологического пространства E по отношению эквивалентности R было отделимо, необхо-

димо, чтобы всякий класс эквивалентности по R был замкнут в E и множество C, определяемое в $E \times E$ отношением R, было замкнуто. Эти необходимые условия не являются достаточными; однако если отношение R открыто, а множество C замкнуто в $E \times E$, то пространство E/R отделимо.

Если для каждой пары различных точек a и b топологического пространства E существует такое непрерывное отображение f открытого множества A, содержащего a и b, в отделимое пространство E', что $f(a) \neq f(b)$, то E отделимо. В частности, всякая топология, мажорирующая отделимую топологию, отделима.

4. Топологическое пространство E называется *регулярным*, если оно отделимо и удовлетворяет следующей аксиоме:

(O_{III}) *Замкнутые окрестности каждой точки из E образуют фундаментальную систему окрестностей этой точки.*

Эта аксиома равносильна следующей:

(O'_{III}) *Для каждой точки $a \in E$ и каждого замкнутого множества $A \subset E$, не содержащего a, существуют окрестность точки a и окрестность множества A, не имеющие общих точек.*

Всякое подпространство регулярного пространства регулярно. Обратно, если всякая точка топологического пространства E обладает замкнутой окрестностью, являющейся его регулярным подпространством, то E регулярно.

Пусть E — регулярное пространство, A — замкнутое множество в E и R — отношение эквивалентности, получаемое путем отождествления всех точек из A (иными словами — отношение эквивалентности, классами которого служат A и множества $\{x\}$ для всех $x \in CA$). Тогда факторпространство E/R отделимо.

5. Топологическое пространство E называется *вполне регулярным*, если оно отделимо и равномеризуемо, т. е. если оно отделимо и удовлетворяет следующей аксиоме:

(O_{IV}) *Каковы бы ни были точка $x_0 \in E$ и ее окрестность V, на E существует непрерывная числовая функция со значениями в интервале $[0, 1]$, равная 1 в точке x_0 и 0 на CV.*

Всякое вполне регулярное пространство регулярно. Обратное неверно. Всякое подпространство вполне регулярного пространства вполне регулярно. Произведение всякого семейства вполне регулярных пространств вполне регулярно.

Всякое вполне регулярное пространство E гомеоморфно подпространству некоторого «куба» K^I, т. е. компактного пространства, являющегося произведением семейства (мощности, зависящей от E) пространств, совпадающих с компактным интервалом $K \subset \mathbf{R}$.

°Всякое вполне регулярное пространство E, обладающее счетным базисом, гомеоморфно подпространству «куба» вида $K^{\mathbf{N}}$, т. е. произведения счетного семейства пространств, совпадающих с компактным интервалом $K \subset \mathbf{R}$; в частности, такое пространство E метризуемо.°

6. Пусть E — равномеризуемое не обязательно отделимое пространство, $\mathcal{U}$ — (не обязательно отделимая) равномерная структура, согласующаяся с его топологией, и C — пересечение всех окружений структуры $\mathcal{U}$. Отношение $(x, y) \in C$ есть отношение эквивалентности в E; обозначим его R. Пусть E' — факторпространство E/R; тогда образы в $E' \times E'$ окружений равномерной структуры $\mathcal{U}$ относительно расширения на $E \times E$ канонического отображения E на E' образуют фильтр окружений отделимой равномерной структуры в E'; она называется отделимой равномерной структурой, *ассоциированной* с $\mathcal{U}$. Порождаемая ею топология совпадает с (вполне регулярной) топологией факторпространства E/R; при этом R эквивалентно отношению $x \in \overline{\{y\}}$, и всякое открытое (соотв. замкнутое) множество в E насыщено по R. Если F — второе равномерное пространство, $F' = F/S$ — ассоциированное с ним отделимое равномерное пространство и f — непрерывное отображение E в F, то f согласуется с отношениями R, S и дает при факторизации непрерывное отображение E' в F'. Равномерное пространство E/R изоморфно образу $i(E)$ пространства E в его отделимом пополнении $\hat{E}$.

В случае, когда равномерная структура $\mathcal{U}$ определена семейством отклонений (f_ι), каждая из функций $f_\iota(x, y)$ согласуется (по x и y) с отношением R и дает при факторизации отклонение f'_ι на E' такое, что семейство (f'_ι) определяет отделимую равномерную структуру, ассоциированную с $\mathcal{U}$. В частности, если $\mathcal{U}$ определена счетным семейством отклонений, то ассоциированная равномерная структура метризуема.

7. Топологическое пространство E называется *нормальным*, если оно удовлетворяет одной из следующих четырех равносильных аксиом (теоремы Урысона, гл. IX, § 4, теоремы 1 и 2).

(O_V) *Каковы бы ни были непересекающиеся замкнутые множества A и B в E, существует непрерывное отображение E в $[0, 1]$, равное 0 на A и 1 на B.*

(O'_V) *Каковы бы ни были непересекающиеся замкнутые множества A и B в E, существуют непересекающиеся открытые множества U и V такие, что $A \subset U$ и $B \subset V$.*

(O''_V) *Каковы бы ни были замкнутое множество A в E и его окрестность V, существует окрестность W множества A такая, что $\overline{W} \subset V$.*

(O'''_V) *Каковы бы ни были замкнутое множество A в E и непрерывная числовая функция f на A, существует непрерывная числовая функция g на E, продолжающая f.*

Отметим, что если функция f в условии (O'''_V) конечна, то на E существует конечная непрерывная числовая функция, продолжающая f.

8. Всякое нормальное пространство вполне регулярно (и тем более регулярно). Обратное неверно. Однако если E вполне регулярно, а A и B соответственно компактное и замкнутое множества в E, не имеющие общих точек, то существуют непересекающиеся открытые множества U и V такие, что $A \subset U$ и $B \subset V$.

Всякое замкнутое подпространство нормального пространства нормально; произвольное подпространство нормального пространства не обязательно нормально. Произведение двух нормальных пространств не обязательно нормально.

9. Всякое метризуемое пространство нормально, но произведение несчетного семейства метризуемых пространств не обязательно нормально. Кроме того, факторпространство, даже отделимое, метризуемого пространства не обязательно регулярно.

Всякое компактное пространство нормально. Локально компактное пространство не обязательно нормально. Однако всякое паракомпактное пространство нормально.

10. Пусть E — нормальное пространство и $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — конечное открытое покрытие замкнутого множества $F \subset E$. Тогда суще-

ствует конечное открытое покрытие $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ множества F такое, что $\overline{B}_i \subset A_i$ для всех i.

Семейство $(A_\iota)_{\iota\in I}$ подмножеств топологического пространства E называют *локально конечным*, если каждая точка $x \in E$ обладает окрестностью V такой, что $V \cap A_\iota$ пусто для всех индексов ι, за исключением конечного их числа.

Пусть $(A_\iota)_{\iota\in I}$ — локально конечное открытое покрытие нормального пространства E. Существует локально конечное открытое покрытие $(B_\iota)_{\iota\in I}$ пространства E с тем же множеством индексов, такое, что $\overline{B}_\iota \subset A_\iota$ для всех $\iota \in I$.

11. Семейство $(f_\iota)_{\iota\in I}$ конечных числовых функций, определенных на топологическом пространстве E, называют *локально конечным*, если каждая точка $x \in E$ обладает окрестностью V такой, что функции f_ι на V равны нулю для всех индексов $\iota \in I$, за исключением конечного их числа. Тогда сумма $\sum_{\iota\in E} f_\iota(x)$ определена в каждой точке $x \in E$; она непрерывна на E, если все функции f_ι непрерывны на E.

Непрерывным разбиением единицы, определенным на E, называют всякое локально конечное семейство $(f_\iota)_{\iota\in I}$ неотрицательных числовых функций, определенных и непрерывных на E, такое, что $\sum_{\iota\in I} f_\iota(x) = 1$ в каждой точке $x \in E$. Пусть $(A_\iota)_{\iota\in I}$ — локально конечное открытое покрытие пространства E; говорят, что непрерывное разбиение единицы $(f_\iota)_{\iota\in I}$ *подчинено* покрытию (A_ι), если $f_\iota(x) = 0$ для всех $x \notin A_\iota$, каково бы ни было ι.

Для всякого локально конечного открытого покрытия нормального пространства E существует подчиненное ему непрерывное разбиение единицы.

§ 6. Непрерывные функции, равномерно непрерывные функции, полунепрерывные функции

1. Пусть E и E' — топологические пространства; говорят, что отображение $f\colon E \to E'$ *непрерывно в точке* $a \in E$, если для всякой окрестности V' точки $f(a)$ существует окрестность V точки a такая, что $f(V) \subset V'$, или, что то же, если $f^{-1}(V')$ — окрестность точки a для всякой окрестности V' точки $f(a)$. Условие непрерывности f

в точке a записывается еще так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$; это означает также, что для всякого базиса фильтра $\mathfrak{B}$, сходящегося к a, $f(\mathfrak{B})$ есть базис фильтра, сходящийся к $f(a)$.

2. Пусть E и E' — метрические пространства, а d и d' — их расстояния; для того чтобы отображение $f\colon E \to E'$ было непрерывно в точке $a \in E$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{x \to a} d'(f(a), f(x)) = 0$ или также чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало $\delta > 0$ такое, что $d(x, a) \leqslant \delta$ влечет $d'(f(a), f(x)) \leqslant \varepsilon$.

Если E и E' — метризуемые пространства, то для того, чтобы f было непрерывно в точке a, необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности (x_n) в E, сходящейся к a, последовательность $(f(x_n))$ сходилась к $f(a)$.

3. Пусть E и E' — топологические пространства. Говорят, что отображение $f\colon E \to E'$ *непрерывно на* E (или просто *непрерывно*), если оно непрерывно в каждой точке из E.

Это условие равносильно каждому из следующих:

а) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ для каждого $A \subset E$.

б) Прообраз относительно f всякого открытого множества из E' есть открытое множество в E.

в) Прообраз относительно f всякого замкнутого множества из E' есть замкнутое множество в E.

4. Пусть f — непрерывное отображение топологического пространства E в топологическое пространство E'. Образ открытого (соотв. замкнутого) множества из E при отображении f не обязательно является открытым (соотв. замкнутым) множеством в E'. Однако образ компактного (соотв. относительно компактного) множества из E при отображении f компактен (соотв. относительно компактен) в E', если E' отделимо.

Образ связного множества из E при отображении f есть связное множество в E'. Напротив, прообраз относительно f связного множества из E' не обязательно связен.

Если E — связное пространство, f — непрерывная числовая функция на E, a и b — произвольные точки из E и α — вещественное число, принадлежащее замкнутому интервалу с концами $f(a)$ и $f(b)$, то существует хотя бы одна точка $x \in E$, для которой $f(x) = \alpha$.

5. Пусть E и E' — равномерные пространства. Говорят, что отображение $f\colon E \to E'$ *равномерно непрерывно*, если для каждого окружения V' равномерной структуры пространства E' существует окружение V равномерной структуры пространства E такое, что $(x, y) \in V$ влечет $(f(x), f(y)) \in V'$.

Пусть E и E' — метрические пространства, а d и d' — их расстояния; для того чтобы отображение $f\colon E \to E'$ было равномерно непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало $\delta > 0$ такое, что $d(x, y) \leqslant \delta$ влечет $d'(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$.

Если равномерная структура равномерного пространства E определена семейством (f_ι) отклонений, то каждая числовая функция $f_\iota(x, y)$ равномерно непрерывна на $E \times E$. В метрическом пространстве E расстояние $d(x, A)$ точки x от множества A равномерно непрерывно.

Если f — равномерно непрерывное отображение равномерного пространства E в равномерное пространство E', то образ при f всякого базиса фильтра Коши из E есть базис фильтра Коши в E'; образ при f каждого предкомпактного множества из E есть предкомпактное множество в E'.

Всякое равномерно непрерывное отображение непрерывно. Обратное неверно. Однако если E — компактное пространство, то всякое его непрерывное отображение в равномерное пространство E' равномерно непрерывно (гл. II, § 4, теорема 2).

6. Пусть E, E' и E'' — топологические пространства, f — отображение E в E' и g — отображение E' в E''. Если f непрерывно в точке a (соотв. непрерывно на E), а g непрерывно в точке $f(a)$ (соотв. непрерывно на E'), то композиция $g \circ f$ непрерывна в точке a (соотв. на E).

Непрерывное отображение $f\colon E \to E'$ остается непрерывным при замене топологии пространства E мажорирующей ее топологией, а топологии пространства E' — мажорируемой ею топологией.

Для того чтобы биективное отображение f топологического пространства E на топологическое пространство E' было гомеоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы f и f^{-1} были непрерывны; в этом случае f называют *взаимно непрерывным*.

Всякое биективное непрерывное отображение компактного пространства E на отделимое пространство E' есть гомеоморфизм E на E'.

7. Пусть E, E' и E'' — равномерные пространства. Если f — равномерно непрерывное отображение E в E', а g — равномерно непрерывное отображение E' в E'', то $g \circ f$ есть равномерно непрерывное отображение E в E''.

Равномерно непрерывное отображение $f\colon E \to E'$ остается равномерно непрерывным при замене равномерной структуры пространства E мажорирующей ее равномерной структурой, а равномерной структуры пространства E' — мажорируемой ею равномерной структурой.

Для того чтобы биективное отображение f равномерного пространства E на равномерное пространство E' было изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы f и f^{-1} были равномерно непрерывны.

8. Пусть E — топологическое (соотв. равномерное) пространство, F — полное равномерное пространство, H — некоторое множество непрерывных (соотв. равномерно непрерывных) отображений E в F и A — всюду плотное множество в E. Если фильтр $\mathfrak{F}$ в H равномерно сходится на A, то он сходится в каждой точке $x \in E$ к некоторому пределу $f_0(x)$, причем функция f_0 непрерывна (соотв. равномерно непрерывна) на E (гл. X, § 1, теорема 2).

Если E локально компактно и фильтр $\mathfrak{F}$ в H равномерно сходится на всяком компактном множестве из E, то его предел непрерывен на E.

Пусть E — топологическое (соотв. равномерное) пространство, F — полное равномерное пространство и H равностепенно непрерывное (соотв. равномерно равностепенно непрерывное) множество отображений E в F; достаточно, чтобы фильтр $\mathfrak{F}$ в H просто сходился на A, для того, чтобы он сходился во всех точках $x \in E$ к пределу $f_0(x)$ такому, что f_0 непрерывно (соотв. равномерно непрерывно) на E (гл. X, § 2, следствие теоремы 1).

°В частности, верхняя огибающая u и нижняя огибающая v равностепенно непрерывного множества H конечных числовых функций на E — непрерывные функции на E, а множества $u^{-1}(+\infty)$ и $v^{-1}(-\infty)$ открыто-замкнуты.°

9. Пусть A — подмножество топологического (соотв. равномерного) пространства E; отображение f пространства E в топологическое (соотв. равномерное) пространство E' называется *непрерывным относительно A в точке $x_0 \in A$*, если его сужение на A непрерывно в точке x_0; оно называется *непрерывным относительно A* (соотв. *равномерно непрерывным относительно A*), если его сужение на A непрерывно (соотв. равномерно непрерывно).

Если функция f непрерывна (относительно E) в точке $x_0 \in A$ (соотв. непрерывна на E, равномерно непрерывна на E), то она непрерывна относительно A в точке x_0 (соотв. непрерывна относительно A, равномерно непрерывна относительно A). Но функция, определенная на E, может быть не непрерывной во всех точках из E и тем не менее быть непрерывной относительно всюду плотного множества $A \subset E$.

Однако если A — окрестность точки $a \in E$, то всякая функция, непрерывная в a относительно A, будет вместе с тем непрерывной в a относительно E.

10. Пусть A — всюду плотное множество в топологическом пространстве E, а f и g — такие непрерывные отображения E в отделимое пространство E', что $f(x) = g(x)$ для всех $x \in A$; тогда $f(x) = g(x)$ для всех $x \in E$ (*принцип продолжения тождеств*).

Если f и g — числовые функции (конечные или нет), непрерывные на E и такие, что $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in A$, то $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in E$ (*принцип продолжения неравенств*).

Пусть h — отображение A в топологическое пространство E'; для того чтобы существовало непрерывное отображение E в E', продолжающее h, необходимо, чтобы в каждой точке $x \in E$ функция $h(y)$ стремилась к некоторому пределу, когда y стремится к x, оставаясь в A. Если пространство E' регулярно, то это условие достаточно, и тогда непрерывное отображение E в E', продолжающее h, единственно (гл. I, 2-е изд., § 6, теорема 1; 3-е изд., § 8, теорема 1); говорят, что оно получено *продолжением h по непрерывности на E*.

Если E' — полное отделимое равномерное пространство, то для того, чтобы h можно было продолжить по непрерывности на E, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in E$ образ при h

следа на A фильтра окрестностей точки x был базисом фильтра Коши.

Пусть E — равномерное пространство, а E' — полное отделимое равномерное пространство; если A — всюду плотное множество в E, то всякое его равномерно непрерывное отображение в E' может быть продолжено по непрерывности на E, причем продолженное отображение равномерно непрерывно на E (гл. II, 2-е изд., § 3, теорема 1; 3-е изд., § 3, теорема 2).

11. Пусть A — замкнутое множество в нормальном пространстве E. Для каждой числовой (соотв. конечной числовой) функции f, определенной и непрерывной на A, существует числовая (соотв. конечная числовая) функция $\bar{f}$, определенная и непрерывная на E и продолжающая f (гл. IX, § 4, теорема 2); при этом, если $A \neq E$, то таких функций $\bar{f}$ бесконечное множество.

12. Пусть (F_ι) — семейство топологических (соотв. равномерных) пространств и $F = \prod_\iota F_\iota$ — их произведение; проекция pr_ι пространства F на F_ι для каждого ι непрерывна (соотв. равномерно непрерывна). Для того чтобы отображение $x \mapsto (f_\iota(x))$ топологического (соотв. равномерного) пространства E в F было непрерывно (соотв. равномерно непрерывно), необходимо и достаточно, чтобы каждая из функций f_ι была непрерывна (соотв. равномерно непрерывна).

13. Пусть E, E' и F — топологические (соотв. равномерные) пространства, а f — непрерывное (соотв. равномерно непрерывное) отображение $E \times E'$ в F; тогда для каждого $y \in E'$ частичное отображение $x \mapsto f(x, y)$ (обозначаемое f_y) E в F непрерывно (соотв. равномерно непрерывно). Обратное неверно: может случиться, что отображение $x \mapsto f(x, y)$ равномерно непрерывно для каждого $y \in E$ и отображение $y \mapsto f(x, y)$ равномерно непрерывно для каждого $x \in E$, а отображение $(x, y) \mapsto f(x, y)$ не непрерывно ни в одной точке из $E \times E'$.

Пусть E — локально компактное пространство; для того чтобы f было непрерывно на $E \times E'$, необходимо и достаточно, чтобы: а) f_y было непрерывно на E при всяком $y \in E'$; б) каково бы ни

было $y_0 \in E'$, f_y равномерно сходилось к f_{y_0} на всяком компактном множестве из E при стремлении y к y_0 в E' (гл. X, § 3, теорема 3).

°Пусть E — бэровское пространство, E' и F — метризуемые пространства и f — отображение $E \times E'$ в F такое, что для всякого $y \in E'$ отображение $x \mapsto f(x, y)$ непрерывно на E и для всякого $x \in E$ отображение $y \mapsto f(x, y)$ непрерывно на E'. Тогда для каждого $b \in E'$ в пространстве E существует множество S_b с тощим дополнением такое, что функция f непрерывна в точке (a, b) при всяком $a \in S_b$.°

14. Пусть E — топологическое пространство и R — отношение эквивалентности в E. Каноническое отображение φ пространства E на факторпространстве E/R непрерывно. Для того чтобы отображение f пространства E/R в топологическое пространство E' было непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы $f \circ \varphi$ было непрерывно на E; иначе говоря, имеется взаимно однозначное соответствие между множеством всех непрерывных отображений E/R в E' и множеством всех непрерывных отображений E в E', постоянных на каждом классе по R.

Пусть E и F — топологические пространства, R — отношение эквивалентности в E, S — отношение эквивалентности в F и f — непрерывное отображение E в F, согласованное с отношениями эквивалентности R и S; тогда отображение g: $E/R \to F/S$, получаемое из f факторизацией, непрерывно.

15. Пусть f — непрерывное отображение топологического пространства E в топологическое пространство F и R — отношение эквивалентности $f(x) = f(y)$ в E. Пусть $f = \psi \circ g \circ \varphi$ — каноническое разложение f, где φ — каноническое отображение E на E/R, g — биективное отображение E/R на $f(E)$ и ψ — каноническое отображение $f(E)$ в F. Биективное отображение g непрерывно, но не обязательно является гомеоморфизмом; для того чтобы g было гомеоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы образ при f всякого насыщенного по R открытого множества был следом на $f(E)$ открытого множества из F. Это последнее условие всегда выполнено, если существует непрерывное отображение h: $F \to E$ такое, что $f \circ h$ есть тождественное отображение F на себя, а также в том случае, когда E компактно, а F отделимо.

16. Числовую функцию (конечную или нет), определенную на топологическом пространстве E, называют *полунепрерывной снизу* (соотв. *сверху*) *в точке* $a \in E$, если для каждого $h < f(a)$ (соотв. $k > f(a)$) существует окрестность V точки a такая, что $h < f(x)$ (соотв. $k > f(x)$) при всех $x \in V$. Функцию f называют *полунепрерывной снизу* (соотв. *сверху*) *на* E, если она полунепрерывна снизу (соотв. сверху) во всех точках из E.

Для того чтобы числовая функция f была непрерывна в точке, необходимо и достаточно, чтобы она была одновременно полунепрерывна снизу и сверху в этой точке.

17. Для того чтобы числовая функция f, определенная на топологическом пространстве E, была полунепрерывна снизу (соотв. сверху) в точке $a \in E$, необходимо и достаточно, чтобы $\liminf\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ (соотв. $\limsup\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$).

Какова бы ни была числовая функция f, определенная на всюду плотном множестве A из E, функция g (соотв. h), определенная для всех $x \in E$ формулой $g(x) = \liminf\limits_{y \to x,\ y \in A} f(y)$ (соотв. $h(x) = \limsup\limits_{y \to x,\ y \in A} f(y)$) полунепрерывна снизу (соотв. сверху) на E; g (соотв. h) называется *полунепрерывной снизу* (соотв. *сверху*) *регуляризацией* функции f; она является продолжением f, если f полунепрерывна снизу (соотв. сверху) на A.

Пусть f — произвольное отображение топологического пространства E в метрическое пространство F; колебание $\omega(x; f)$ функции f в точке x полунепрерывно сверху на E.

18. Для того чтобы числовая функция f, определенная на топологическом пространстве E, была полунепрерывна снизу (соотв. сверху) на E, необходимо и достаточно, чтобы для всякого конечного числа k множество тех $x \in E$, для которых $f(x) > k$ (соотв. $f(x) < k$), было открыто, или, что то же, множество тех $x \in E$, для которых $f(x) \geqslant k$ (соотв. $f(x) \leqslant k$), замкнуто. В частности, для того чтобы множество было открыто (соотв. замкнуто), необходимо и достаточно, чтобы его характеристическая функция φ_A была полунепрерывна снизу (соотв. сверху).

Если f — полунепрерывная снизу (соотв. сверху) функция на компактном пространстве E, то существует хотя бы одна точка

$a \in E$, для которой $f(a) = \inf_{x \in E} f(x)$ (соотв. $f(a) = \sup_{x \in E} f(x)$) (*теорема Вейерштрасса*) (гл. IV, § 6, теорема 3).

Пусть E — бэровское пространство и $(f_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство полунепрерывных снизу функций на E, верхняя огибающая которых конечна во всех точках из E. Тогда всякое непустое открытое множество содержит непустое открытое подмножество, на котором семейство (f_ι) равномерно ограниченно (гл. IX, § 5, теорема 2).

19. Если функция f полунепрерывна снизу в точке a, то $-f$ полунепрерывна сверху в точке a, и обратно. Если f и g полунепрерывны снизу в точке a, то это же верно для $\inf(f, g)$ и $\sup(f, g)$, а также для $f \dot{+} g$ (если эта функция определена в точке a) и fg (если f и g неотрицательны и их произведение fg определено в точке a). Если, кроме того, $f \geqslant 0$, то $1/f$ полунепрерывна сверху в точке a.

Верхняя огибающая семейства функций (f_ι), полунепрерывных снизу в точке a, полунепрерывна снизу в этой точке. В частности, верхняя огибающая всякого семейства непрерывных функций на E полунепрерывна снизу на E. Обратно, если E — равномеризуемое пространство, то всякая полунепрерывная снизу функция на E является верхней огибающей семейства непрерывных функций; если при этом E метризуемо, то всякая полунепрерывная снизу функция на E есть верхняя огибающая возрастающей последовательности непрерывных функций.

§ 7. Подпространства; произведения пространств; факторпространства

1. Пусть E — топологическое пространство и A — его непустое подмножество. Следы на A всевозможных открытых множеств из E образуют совокупность открытых множеств в топологии, которую называют топологией, *индуцируемой* в A топологией пространства E. Множество A, наделенное этой топологией, называют *подпространством* пространства E.

Если $B \subset A$, то подпространство B подпространства A совпадает с подпространством B пространства E (транзитивность индуцированной топологии).

Если $\mathfrak{G}$ — система образующих топологии пространства E, то следы на A множеств из $\mathfrak{G}$ составляют систему образующих топологии подпространства A.

Каноническое отображение A в E непрерывно.

2. Множество, открытое в A, не обязательно открыто в E; для того чтобы всякое открытое множество из A было открытым в E, необходимо и достаточно, чтобы A было открыто в E.

Замкнутые множества в A — не что иное, как следы на A замкнутых множеств из E; для того чтобы всякое замкнутое множество в A было замкнутым в E, необходимо и достаточно, чтобы A было замкнуто в E.

Окрестности точки $x \in A$ относительно A — это следы на A окрестностей x относительно E; для того чтобы всякая окрестность точки x относительно A была ее окрестностью относительно E, необходимо и достаточно, чтобы A было окрестностью x в E.

Если $B \subset A$, то замыкание B в A есть след на A замыкания B в E.

Сужение на A непрерывного отображения f пространства E в пространство E' является непрерывным отображением A в E'; но оно может быть непрерывно и в том случае, когда f не непрерывно ни в одной точке из E. Кроме того, непрерывное отображение A в E' не всегда можно продолжить до непрерывного отображения E в E'; однако такое продолжение возможно, если A — замкнутое подпространство нормального пространства E, а $E' = \mathbf{R}$ (гл. IX, § 4, теорема 2).

3. Пусть E — равномерное пространство и A — его непустое подмножество. Следы на $A \times A$ окружений равномерной структуры пространства E образуют фильтр окружений равномерной структуры в A, которая называется равномерной структурой, *индуцируемой* в A равномерной структурой пространства E; топология, порождаемая этой структурой, совпадает с топологией, индуцируемой в A из E. Множество A, наделенное этой равномерной структурой и порожденной ею топологией, называется *равномерным подпространством* пространства E. Если равномерная структура пространства E определена семейством отклонений (f_ι), то сужения f_ι на $A \times A$ определяют в A индуцированную равномерную структуру.

Если $B \subset A$, то равномерное подпространство B равномерного подпространства A совпадает с равномерным подпространством B равномерного пространства E (транзитивность индуцированных равномерных структур).

Каноническое отображение A в E равномерно непрерывно. Сужение на A равномерно непрерывного отображения E в равномерное пространство E' равномерно непрерывно. Обратно, если A всюду плотно в E, а E' полно и отделимо, то всякое равномерно непрерывное отображение A в E' продолжается, и притом единственным образом, до равномерно непрерывного отображения E в E'.

4. Всякое подпространство отделимого (соотв. регулярного, равномеризуемого, метризуемого) топологического пространства отделимо (соотв. регулярно, равномеризуемо, метризуемо). Подпространство нормального пространства не обязательно нормально; однако замкнутое подпространство нормального пространства нормально.

Всякое замкнутое подпространство компактного пространства компактно. Для того чтобы подпространство локально компактного пространства E было локально компактно, необходимо и достаточно, чтобы оно было пересечением открытого и замкнутого множеств из E.

Всякое замкнутое равномерное подпространство полного равномерного пространства полно. Всякое полное равномерное подпространство отделимого равномерного пространства E замкнуто в E.

5. Пусть $(F_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство топологических пространств и $E = \prod_{\iota\in I} F_\iota$ — произведение множеств F_ι. *Элементарным множеством* в E называют всякое множество вида $\prod_{\iota\in I} A_\iota$, где A_ι открыто в F_ι для всех индексов ι и $A_\iota = F_\iota$ для всех, кроме конечного числа, индексов $\iota \in I$. *Произведением топологий* пространств F_ι называют топологию в E, порождаемую совокупностью всех элементарных множеств; множество E, наделенное этой топологией, называют *произведением* пространств F_ι (а F_ι — пространствами-сомножителями пространства E).

Пусть $\mathfrak{S}_\iota$ для каждого $\iota \in I$ — система образующих топологии пространства F_ι; тогда элементарные множества $\prod_\iota A_\iota$, в которых

$A_\iota \in \mathfrak{H}_\iota$ для всех ι таких, что $A_\iota \neq F_\iota$, составляют систему образующих топологии пространства E.

Для каждой точки $x \in E$ элементарные множества, содержащие x, образуют фундаментальную систему ее окрестностей.

6. Для каждого непустого подмножества J множества индексов I проекция pr_J произведения $E = \prod_{\iota \in I} F_\iota$ на частичное произведение $E_J = \prod_{\iota \in J} F_\iota$ непрерывна. Если $(J_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ — разбиение множества I, то каноническое отображение E на произведение $\prod_{\varkappa \in K} E_{J_\varkappa}$ есть гомеоморфизм.

Пусть A_ι для каждого $\iota \in I$ — непустое множество из F_ι. Топология, индуцируемая в множестве $A = \prod_{\iota \in I} A_\iota \subset E$ произведением топологий пространств F_ι, совпадает с произведением топологий подпространств A_ι.

7. Пусть A — открытое (соотв. замкнутое) множество в произведении $E_1 \times E_2$ топологических пространств E_1 и E_2. Для каждого $x \in E$ срез $A(x)$ множества A по x есть открытое (соотв. замкнутое) множество в E_2.

Проекции открытого множества из $E_1 \times E_2$ на пространства-сомножители являются открытыми множествами. Напротив, проекция замкнутого множества вообще не замкнута; однако если E_1 отделимо, а E_2 компактно, то проекция на E_1 каждого замкнутого множества из $E_1 \times E_2$ замкнута.

В произведении $E = \prod_\iota F_\iota$ замыкание произведения $\prod_\iota A_\iota$ множеств $A_\iota \subset F_\iota$ совпадает с произведением $\prod_\iota \overline{A}_\iota$ их замыканий. В частности, для того чтобы $\prod_\iota A_\iota$ было замкнуто в E, необходимо и достаточно, чтобы каждое A_ι было замкнуто в F_ι.

8. Для того чтобы базис фильтра $\mathfrak{F}$ в произведении $E = \prod_{\iota \in I} F_\iota$ сходился к точке $x = (x_\iota)$, необходимо и достаточно, чтобы его проекция $\mathrm{pr}_\iota(\mathfrak{F})$ сходилась к x_ι для каждого $\iota \in I$.

Пусть $f = (f_\iota)$ — отображение множества A в произведение E; для того чтобы f имело предел $x = (x_\iota)$ по фильтру $\mathfrak{F}$ из A, необходимо и достаточно, чтобы f_ι имело предел x_ι по фильтру $\mathfrak{F}$ при каждом $\iota \in I$. В частности, если A — топологическое пространство, то для того, чтобы f было непрерывно в точке $a \in A$, необходимо и достаточно, чтобы каждое f_ι было непрерывно в a.

Пусть $(E_\iota)_{\iota \in I}$ и $(F_\iota)_{\iota \in I}$ — семейства топологических пространств с одним и тем же множеством индексов и f_ι для каждого $\iota \in I$ — отображение E_ι в F_ι. Для того чтобы отображение $(x_\iota) \mapsto (f_\iota(x_\iota))$ произведения $\prod_{\iota \in I} E_\iota$ в произведение $\prod_{\iota \in I} F_\iota$ было непрерывно в точке $a = (a_\iota)$, необходимо и достаточно, чтобы f_ι было непрерывно в точке a_ι для каждого $\iota \in I$.

В случае, когда все пространства E_ι семейства $(E_\iota)_{\iota \in I}$ совпадают с одним и тем же пространством E, произведение E^I множеств E_ι есть не что иное, как множество всевозможных отображений I в E; топология произведения в этом множестве есть топология простой сходимости.

Пусть f — отображение произведения $E_1 \times E_2$ топологических пространств E_1 и E_2 в топологическое пространство E'. Если f непрерывно в точке (a_1, a_2), то отображение $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$ (соотв. $x_2 \mapsto f(a_1, x_2)$) непрерывно в точке a_1 (соотв. a_2). Может случиться, что каждое из отображений $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$, $x_2 \mapsto f(a_1, x_2)$ непрерывно (для любой точки (a_1, a_2)), а функция f не непрерывна ни в одной точке из $E_1 \times E_2$ (см. § 6, n° 13).

9. Для того чтобы произведение непустых топологических пространств E_ι было отделимо (соотв. равномеризуемо), необходимо и достаточно, чтобы каждое из E_ι было отделимо (соотв. равномеризуемо). Произведение всякого счетного семейства метризуемых пространств метризуемо. Произведение двух нормальных пространств не обязательно нормально; произведение несчетного семейства метризуемых пространств не обязательно нормально.

Для того чтобы произведение пространств E_ι было компактно, необходимо и достаточно, чтобы каждое E_ι было компактно (*теорема Тихонова*, гл. I, 2-е изд., § 10, теорема 3; 3-е изд., § 9, теорема 3); для того чтобы оно было локально компактно, необходимо и достаточно, чтобы все E_ι были локально компактны и, за исключением конечного числа индексов, компактны.

Для того чтобы произведение пространств E_ι было связно (соотв. локально связно), необходимо и достаточно, чтобы каждое E_ι было связно (соотв. чтобы все E_ι были локально связны и, за исключением конечного числа индексов, связны).

10. Топология произведения $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ семейства $(E_\iota)_{\iota \in I}$ топологических пространств является слабейшей из топологий в E, при которых все проекции pr_ι непрерывны.

Вообще, пусть $(F_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство топологических пространств, E — множество, f_ι для каждого $\iota \in I$ — отображение E в F_ι, $\mathscr{T}$ — слабейшая из топологий в E, при которых все функции f_ι непрерывны, и $\mathfrak{O}_\iota$ — совокупность всех открытых множеств в F_ι. Топология $\mathscr{T}$ порождается объединением множеств подмножеств $f_\iota^{-1}(\mathfrak{O}_\iota)$. Для того чтобы базис фильтра $\mathfrak{B}$ в E сходился к точке a в топологии $\mathscr{T}$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\iota \in I$ базис фильтра $f_\iota(\mathfrak{B})$ сходился к $f_\iota(a)$ в F_ι. Для того чтобы отображение g топологического пространства G в E было непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы каждое из отображений $f_\iota \circ g$ было непрерывно.

Если все F_ι отделимы, то для того, чтобы топология $\mathscr{T}$ была отделима, необходимо и достаточно, чтобы для каждой пары различных точек x, y из E существовало $\iota \in I$ такое, что $f_\iota(x) \neq f_\iota(y)$.

11. Пусть $(F_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство равномерных пространств и E — произведение $\prod_{\iota \in I} F_\iota$ множеств F_ι. Рассмотрим на множестве $E \times E$, канонически отождествленном с произведением $\prod_{\iota \in I}(F_\iota \times F_\iota)$, множества вида $\prod_{\iota \in I} V_\iota$, где V_ι — окружение для F_ι при всех ι и $V_\iota = F_\iota \times F_\iota$ при всех ι, кроме конечного их числа. Эти множества образуют фундаментальную систему окружений равномерной структуры в E, называемой *произведением* равномерных структур пространств F_ι. Топология, порождаемая этой равномерной структурой, совпадает с произведением топологий пространств F_ι; множество E, наделенное этой равномерной структурой и порожденной ею топологией, называется *произведе-*

нием равномерных пространств F_ι (а F_ι — пространствами-*сомножителями* пространства E).

12. Пусть $(F_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство равномерных пространств. Для каждого непустого подмножества J множества индексов I проекция pr_J произведения $E=\prod_{\iota\in I} F_\iota$ на произведение $E_J=\prod_{\iota\in J} F_\iota$ равномерно непрерывна. Если $(J_\varkappa)_{\varkappa\in K}$ — разбиение множества I, то каноническое отображение E на равномерное пространство $\prod_{\varkappa\in K} E_{J_\varkappa}$ есть изоморфизм.

Пусть A_ι для каждого $\iota\in I$ — непустое подмножество пространства F_ι. Равномерная структура, индуцируемая в множестве $A=\prod_{\iota\in I} A_\iota\subset E$ равномерной структурой произведения равномерных структур пространств F_ι, совпадает с произведением равномерных структур подпространств A_ι.

13. Для того чтобы базис фильтра $\mathfrak{F}$ в произведении $E=\prod_{\iota\in I} F_\iota$ равномерных пространств был базисом фильтра Коши, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\iota\in I$ его проекция $\mathrm{pr}_\iota(\mathfrak{F})$ была базисом фильтра Коши в F_ι. Для того чтобы E было полно, необходимо и достаточно, чтобы каждое F_ι было полно. Отделимое пополнение $\hat{E}$ пространства E изоморфно произведению $\prod_{\iota\in I}\hat{F}_\iota$ отделимых пополнений пространств F_ι. Для того чтобы E было предкомпактно, необходимо и достаточно, чтобы каждое F_ι было предкомпактно.

14. Пусть A — равномерное пространство и $f=(f_\iota)$ — его отображение в произведение $E=\prod_{\iota\in I} F_\iota$ равномерных пространств; для того чтобы f было равномерно непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы каждое f_ι было равномерно непрерывно.

В случае, когда все равномерные пространства E_ι семейства $(E_\iota)_{\iota\in I}$ совпадают с одним и тем же пространством E, равномерная структура произведения E^I есть равномерная структура простой сходимости.

Пусть f — отображение произведения $E_1 \times E_2$ двух равномерных пространств в равномерное пространство E'; если f равномерно непрерывно, то каждое частичное отображение $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$ (соотв. $x_2 \mapsto f(a_1, x_2)$) равномерно непрерывно; обратное неверно.

15. Равномерная структура произведения $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ семейства (E_ι) равномерных пространств является слабейшей из равномерных структур в E, при которых все проекции pr_ι равномерно непрерывны.

Вообще, пусть $(F_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство равномерных пространств, E — множество, f_ι для каждого $\iota \in I$ — отображение E в F_ι и $\mathscr{U}$ — слабейшая из равномерных структур в E, при которых все f_ι равномерно непрерывны; топология $\mathscr{T}$, индуцируемая равномерной структурой $\mathscr{U}$, есть слабейшая из топологий, при которых все f_ι непрерывны. Для того чтобы отображение g равномерного пространства G в E было равномерно непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы каждое отображение $f_\iota \circ g$ было равномерно непрерывно.

Для того чтобы E было предкомпактно, необходимо и достаточно, чтобы для каждой пары различных точек x, y из E существовало $\iota \in I$ такое, что $f_\iota(x) \neq f_\iota(y)$, и каждое подпространство $f_\iota(E)$ было предкомпактно.

16. Пусть $(F_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство топологических пространств и E — сумма множеств F_ι, так что каждое F_ι отождествимо с подмножеством множества E и множества F_ι образуют его разбиение. Пусть $\mathfrak{O}_\iota$ —множество всех открытых множеств из F_ι, а $\mathfrak{G}$ — объединение (в $\mathfrak{P}(E)$) множеств $\mathfrak{O}_\iota$; топологию, порождаемую в E множеством $\mathfrak{G}$, называют *суммой* топологий пространств F_ι, а множество E, наделенное этой топологией,— *топологической суммой* пространств F_ι.

Для того чтобы множество A было открыто (соотв. замкнуто) в E, необходимо и достаточно, чтобы при всяком ι множество $A \cap F_\iota$ было открыто (соотв. замкнуто) в F_ι. Каждое множество F_ι открыто-замкнуто в E. Обратно, если (E_ι) — разбиение топологического пространства E, состоящее из открыто-замкнутых множеств, то E — топологическая сумма подпространств E_ι.

17. Пусть E — топологическое пространство, R — отношение эквивалентности в E и φ — каноническое отображение E на фактормножество E/R. *Фактортопологией* топологии пространства E по отношению R называют топологию в E/R, открытыми (соотв. замкнутыми) множествами которой являются те множества A, для которых $\varphi^{-1}(A)$ открыто (соотв. замкнуто) в E; таким образом, это — канонические образы тех множеств из E, насыщение которых по R открыто (соотв. замкнуто) в E. Множество E/R, наделенное этой топологией, называется *факторпространством E по R*.

Отношение эквивалентности R в E называется *открытым* (соотв. *замкнутым*), если насыщение по R всякого открытого (соотв. замкнутого) множества из E открыто (соотв. замкнуто) в E, или, что то же, если образ при φ всякого открытого (соотв. замкнутого) множества из E есть открытое (соотв. замкнутое) множество в E/R.

Для того чтобы R было открыто, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $x \in E$ фильтр окрестностей точки $\varphi(x)$ в факторпространстве E/R совпадал с образом при φ фильтра окрестностей точки x в E.

Для того чтобы R было замкнуто, необходимо и достаточно, чтобы всякий класс эквивалентности по R обладал фундаментальной системой окрестностей, насыщенных по R.

18. Для того чтобы факторпространство E/R было отделимо, необходимо, чтобы всякий класс эквивалентности по R был замкнут и множество C, определяемое в произведении $E \times E$ отношением R, было замкнуто. Если R открыто, это последнее условие также достаточно.

Если E компактно, то следующие три условия равносильны: а) E/R отделимо; б) отношение R замкнуто; в) множество C замкнуто в $E \times E$. Если одно из этих условий выполнено, то E/R компактно (гл. I, § 10, предложение 8).

Если E локально компактно, то E/R может быть отделимо, не будучи локально компактным. Однако, если насыщение по R всякого компактного множества из E компактно, то отношение R замкнуто и пространство E/R локально компактно.

Если E метризуемо, то факторпространство E/R может быть отделимо и не регулярно; однако, если E компактно и метризуемо, а E/R отделимо, то E/R компактно и метризуемо.

Пусть E — регулярное пространство, A — замкнутое множество в E и R — отношение эквивалентности, классами которого служат A и все точки из $\complement A$; тогда E/R (т. е. пространство, полученное «отождествлением всех точек из A») отделимо.

Всякое факторпространство связного (соотв. локально связного) пространства связно (соотв. локально связно).

19. Каноническое отображение φ топологического пространства E на факторпространство E/R непрерывно. Для того чтобы отображение f пространства E/R в топологическое пространство E' было непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы $f \circ \varphi$ было непрерывно на E; другими словами, имеется взаимно однозначное соответствие между множеством всех непрерывных отображений E/R в E' и множеством всех непрерывных отображений E в E', постоянных на каждом классе эквивалентности по R.

Пусть E и F — топологические пространства и R (соотв. S) — отношение эквивалентности в E (соотв. F). Если f — непрерывное отображение E в F, согласующееся с отношениями эквивалентности R и S, то отображение E/R в F/S, полученное из f факторизацией, непрерывно.

20. Пусть f — непрерывное отображение топологического пространства E в топологическое пространство E', R — отношение эквивалентности $f(x) = f(y)$ в E, φ — каноническое отображение E на E/R и $f = g \circ \varphi$, так что g — биективное отображение E/R на некоторое множество из E'. Отображение g непрерывно, но вообще не является гомеоморфизмом факторпространства E/R на подпространство $f(E)$ пространства E'; для того чтобы оно было гомеоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы образ при f всякого открытого множества из E, насыщенного по R, был следом на $f(E)$ открытого множества из E'. Это условие всегда выполнено, если E компактно, а E' отделимо. Оно также выполнено, если существует непрерывное отображение h пространства $G = f(E)$ в E такое, что $f \circ h$ — тождественное отображение G на себя (*непрерывное сечение*).

21. Пусть R и S — отношения эквивалентности в топологическом пространстве E такие, что R влечет S, и S/R — факторотношение отношения эквивалентности S по R в факторпространстве E/R; тогда каноническое отображение E/S на $(E/R)/(S/R)$ есть гомеоморфизм.

22. Пусть E — топологическое пространство, R — отношение эквивалентности в E, $A \subset E$, R_A — отношение эквивалентности, индуцированное в A отношением R, и φ — каноническое отображение E на E/R. Биективное каноническое отображение h пространства A/R_A на $\varphi(A)$ непрерывно, но вообще не является гомеоморфизмом; для того чтобы h было гомеоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы всякое насыщенное по R_A открытое множество в A было следом на A насыщенного по R открытого множества из E.

Это последнее условие выполняется в каждом из следующих случаев:

а) A насыщено по R *и* открыто (*или* замкнуто) в E;

б) отношение R открыто, A открыто в E *или* насыщено по R;

в) отношение R замкнуто, A замкнуто в E *или* насыщено по R;

г) существует непрерывное отображение f пространства E в A такое, что $f(x)$ сравнимо с x по модулю R для каждого $x \in R$.

В этом случае h есть гомеоморфизм A/R_A *на* E/R.

23. Пусть E и F — топологические пространства, а R (соотв S) — отношение эквивалентности в E (соотв. F). Биективное каноническое отображение $(E \times F)/(R \times S)$ на $(E/R) \times (F/S)$ непрерывно; при этом, если R и S открыты, то оно является гомеоморфизмом, а $R \times S$ открыто.

§ 8. Компактные пространства и локально компактные пространства

1. Топологическое пространство E называется *компактным*, если оно отделимо и удовлетворяет, кроме того, одной из следующих четырех равносильных аксиом.

(C) *Всякий фильтр в E обладает хотя бы одной точкой прикосновения.*

(C′) *Всякий ультрафильтр в E сходится.*

(C″) *Всякое семейство замкнутых множеств в E, имеющее пустое пересечение, содержит конечное подсемейство с пустым пересечением.*

(C‴) (*аксиома Бореля — Лебега*). *Всякое открытое покрытие пространства E содержит конечное покрытие этого пространства.*

Множество A в топологическом пространстве E называется *компактным*, если подпространство A пространства E компактно. В отделимом пространстве всякое компактное множество замкнуто. Множество A в топологическом пространстве E называется *относительно компактным* (относительно E), если A содержится в компактном множестве.

2. В компактном пространстве E существует, и притом единственная, равномерная структура, согласующаяся с его топологией (гл. II, § 4, теорема 1); окружениями этой структуры служат все окрестности диагонали Δ в произведении $E \times E$. Пусть $V_{\mathfrak{R}}$ для каждого конечного открытого покрытия $\mathfrak{R} = (A_i)$ пространства E — объединение множеств $A_i \times A_i$ в $E \times E$; когда $\mathfrak{R}$ пробегает все конечные открытые покрытия пространства E, множества $V_{\mathfrak{R}}$ образуют фундаментальную систему окружений равномерной структуры пространства E. В этой равномерной структуре E отделимо и полно.

Равномерное пространство называется *предкомпактным*, если его отделимое пополнение компактно. Множество A в равномерном пространстве E называется *предкомпактным*, если равномерное подпространство A пространства E предкомпактно. В отделимом равномерном пространстве E всякое относительно компактное множество предкомпактно; обратное вообще неверно; но оно верно, если E полно.

3. Пусть E равномерное пространство. Для того чтобы множество $A \subset E$ было предкомпактно, необходимо и достаточно, чтобы для каждого окружения V равномерной структуры пространства E существовало конечное покрытие множества A, все множества которого малы порядка V (гл. II, 2-е изд., § 4, теорема 4; 3-е изд., § 4, теорема 3). Если E — метрическое пространство, то для того, чтобы множество $A \subset E$ было предкомпактно, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало конечное число точек $a_i \in A$ таких, что всякая точка из A удалена хотя бы от одной из точек a_i на расстояние $\leqslant \varepsilon$.

Топология метризуемого компактного пространства обладает счетным базисом; обратно, всякое компактное пространство, топология которого обладает счетным базисом, метризуемо.

Пусть E — метризуемое пространство. Для того чтобы множество $A \subset E$ было относительно компактно в E, необходимо и достаточно, чтобы всякая последовательность точек из A имела в E хотя бы одну предельную точку.

4. Для того чтобы множество A в отделимом топологическом пространстве E было компактно, необходимо и достаточно, чтобы всякое открытое покрытие множества A в E содержало его конечное покрытие.

Всякое подмножество относительно компактного множества относительно компактно. В компактном пространстве всякое замкнутое множество компактно.

В отделимом пространстве объединение двух компактных (соотв. относительно компактных) множеств компактно (соотв. относительно компактно); всякое конечное множество компактно. Обратно, всякое дискретное компактное пространство конечно.

5. Пусть E и E' — отделимые пространства. Если f — непрерывное отображение E в E', то образ при f всякого компактного (соотв. относительно компактного) множества из E есть компактное (соотв. относительно компактное) множество в E'. Всякое биективное непрерывное отображение компактного пространства E на отделимое пространство E' есть гомеоморфизм. Если пространство E компактно, то всякая отделимая топология в E, мажорируемая его топологией, необходимо совпадает с ней.

Пусть E и E' — равномерные пространства и f — равномерно непрерывное отображение E в E'; образ при f всякого предкомпактного множества из E есть предкомпактное множество в E'.

6. Пусть E — компактное пространство и R — отношение эквивалентности в E. Следующие свойства равносильны: а) E/R отделимо; б) отношение R замкнуто; в) множество C, определяемое в $E \times E$ отношением R, замкнуто. При этих условиях факторпространство E/R компактно (гл. I, § 10, предложение 8); если, кроме того, E метризуемо, то и E/R метризуемо.

7. Произведение всякого семейства компактных пространств компактно (гл. I, 2-е изд., § 10, теорема 3; 3-е изд., § 9, теорема 1)

Для того чтобы множество A в произведении $\prod_{\iota\in I} E_\iota$ отделимых пространств было относительно компактно, необходимо и достаточно, чтобы каждая его проекция $\mathrm{pr}_\iota A$ была относительно компактна в E_ι.

Для того чтобы множество A в произведении $\prod_{\iota\in I} E_\iota$ отделимых равномерных пространств было предкомпактно, необходимо и достаточно, чтобы каждая его проекция была предкомпактна.

8. Пусть E — локально компактное пространство, F — отделимое равномерное пространство и H — некоторое множество непрерывных отображений E в F. Для того чтобы H было относительно компактно в пространстве $\mathfrak{C}(E; F)$ всех непрерывных отображений E в F, наделенном топологией компактной сходимости, необходимо и достаточно, чтобы H было равностепенно непрерывно и для каждого $x \in E$ множество $H(x)$ (образованное точками $f(x)$, где f пробегает H) было относительно компактно в F (*теорема Асколи*) (гл. X, § 2, следствие 3 теоремы 2).

9. Пусть E — компактное пространство, $\mathfrak{F}$ — фильтр в E и A — множество всех его точек прикосновения (оно непусто). Каждая окрестность V множества A содержит некоторое множество из $\mathfrak{F}$ (гл. I, 2-е изд., § 10, теорема 1; 3-е изд., § 9, теорема 1). В частности, если фильтр $\mathfrak{F}$ в E имеет только одну точку прикосновения, то он сходится к этой точке.

Для того чтобы базис фильтра $\mathfrak{B}$, образованный всеми замкнутыми окрестностями точки x в компактном пространстве E, был фундаментальной системой ее окрестностей, необходимо и достаточно, чтобы пересечение всех множеств из $\mathfrak{B}$ состояло из одной точки x.

Если A — относительно компактное множество в топологическом пространстве E, то всякий базис фильтра в A обладает хотя бы одной точкой прикосновения в E.

10. Всякое компактное пространство нормально. Более общим образом, если E — отделимое равномерное пространство, а A и B — непересекающиеся компактное и замкнутое множества в E, то существует окружение V для E такое, что $V(A)$ и $V(B)$ не пересекаются. Если A компактное множество в E, то множества

$V(A)$ образуют фундаментальную систему его окрестностей, когда V пробегает фильтр окружений для E.

В локально компактном пространстве всякое компактное множество обладает фундаментальной системой компактных окрестностей.

11. Пусть E — компактное, а E' — равномерное пространства. Всякое непрерывное отображение E в E' равномерно непрерывно (гл. II, § 4, теорема 2). Всякое равностепенно непрерывное множество отображений E в E' равномерно равностепенно непрерывно.

Пусть E' — полное отделимое равномерное пространство и A — всюду плотное подмножество компактного пространства E; для того чтобы непрерывное отображение $f\colon A \to E'$ можно было продолжить по непрерывности на E, необходимо и достаточно, чтобы f было равномерно непрерывно.

12. Всякая полунепрерывная снизу числовая функция f на компактном пространстве E достигает своей нижней грани, т. е. существует точка $a \in E$ такая, что $f(a) = \inf\limits_{x \in E} f(x)$ (гл. IV, § 6, теорема 3). В частности, всякая полунепрерывная снизу функция на E, не принимающая значения $-\infty$, ограниченна снизу.

13. Пусть E — компактное пространство и H — некоторое множество непрерывных конечных числовых функций на E, фильтрующееся по отношению $\leqslant$. Если верхняя огибающая f множества H конечна и непрерывна на E, то фильтр сечений множества H равномерно сходится к f на E (гл. X, § 4, теорема 1). В частности, если возрастающая последовательность непрерывных функций на E имеет конечную и непрерывную верхнюю огибающую f, то она равномерно сходится к f.

Пусть H — равностепенно непрерывное множество отображений компактного пространства E в отделимое равномерное пространство E'. В H топология простой сходимости совпадает с топологией равномерной сходимости (гл. X, § 2, теорема 1).

14. Пусть E — компактное пространство и H — множество непрерывных конечных числовых функций на E, отделяющее точки пространства E. Тогда всякая непрерывная числовая функция на E равномерно аппроксимируема полиномами (с вещественными коэффициентами) относительно функций из H (гл. X, § 4, теорема 3).

15. Топологическое пространство E называют *локально компактным*, если оно отделимо и каждая его точка обладает компактной окрестностью. Всякое дискретное пространство локально компактно. В локально компактном пространстве всякая точка и, более общим образом, всякое компактное множество обладает фундаментальной системой компактных окрестностей.

Для того чтобы множество A в локально компактном пространстве E было замкнуто, необходимо и достаточно, чтобы $A \cap K$ было компактно для каждого компактного множества K из E.

16. В отделимом пространстве E всякое локально компактное подпространство A является пересечением открытого и замкнутого множеств. Обратно, в локально компактном пространстве E всякое подпространство, являющееся пересечением открытого и замкнутого множеств, локально компактно.

Для всякого локально компактного, но не компактного пространства E существует компактное пространство E' такое, что E гомеоморфно его открытому подпространству, дополнение которого сводится к одной точке («бесконечно удаленной точке»); это компактное пространство E' с точностью до гомеоморфизма единственно (*теорема Александрова*) (гл. I, 2-е изд., § 10, теорема 4; 3-е изд., § 9, теорема 4).

Для того чтобы произведение непустых топологических пространств E_ι было локально компактно, необходимо и достаточно, чтобы все E_ι были локально компактны и, за исключением конечного их числа, компактны.

Факторпространство локально компактного пространства E по отношению эквивалентности R не обязательно локально компактно, даже если оно отделимо. Однако если насыщение по R всякого компактного множества из E компактно, то отношение R замкнуто и факторпространство E/R локально компактно.

17. Всякое локально компактное пространство вполне регулярно, но, вообще говоря, существуют различные равномерные структуры, согласующиеся с его топологией. Локально компактное пространство не обязательно нормально.

Всякое локально компактное пространство—бэровское (гл. IX, § 5, теорема 1).

18. Пусть E и E' — локально компактные пространства. Непрерывное отображение $f\colon E \to E'$ называется *совершенным*, если прообраз относительно f всякого компактного множества из E' есть компактное множество в E.

Пусть E и E' — локально компактные, но не компактные пространства, а F и F' — компактные пространства, полученные путем присоединения к E и E' бесконечно удаленных точек ω и ω' соответственно. Для того чтобы непрерывное отображение $f\colon E \to E'$ было совершенным, необходимо и достаточно, чтобы оно могло быть продолжено до непрерывного отображения F в F', переводящего ω в ω'.

Если f — совершенное отображение локально компактного пространства E в локально компактное пространство E', то образ при f всякого замкнутого множества из E есть замкнутое множество в E'.

Если R — отношение эквивалентности в локально компактном пространстве E такое, что насыщение по R всякого компактного множества компактно, то каноническое отображение E на E/R совершенно. Обратно, пусть f — совершенное отображение E в локально компактное пространство E' и R — отношение эквивалентности $f(x) = f(y)$; тогда насыщение по R всякого компактного множества из E компактно. При этом, если φ — каноническое отображение E на E/R, то биективное отображение $g\colon E/R \to f(E)$, для которого $f = g \circ \varphi$, есть гомеоморфизм.

19. Говорят, что локально компактное пространство E *счетно в бесконечности*, если оно является объединением счетного семейства компактных множеств. Тогда существует возрастающая последовательность (U_n) относительно компактных открытых множеств, образующая покрытие E и такая, что $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$ для всех n.

Пусть E — локально компактное, но не компактное пространство, а E' — компактное пространство, полученное путем присоединения к E бесконечно удаленной точки ω. Для того чтобы E было счетно в бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы точка ω обладала в E' счетной фундаментальной системой окрестностей.

Всякое локально компактное пространство, обладающее счетным базисом, счетно в бесконечности, а соответствующее компактное пространство E' тогда метризуемо.

20. Пусть $\mathfrak{R} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ и $\mathfrak{R}' = (V_\beta)_{\beta \in B}$ — покрытия топологического пространства E; говорят, что $\mathfrak{R}'$ мажорирует $\mathfrak{R}$, если для каждого индекса $\beta \in B$ существует индекс $\alpha \in A$ такой, что $V_\beta \subset U_\alpha$. Если $\mathfrak{R}'$ мажорирует $\mathfrak{R}$, а $\mathfrak{R}''$ мажорирует $\mathfrak{R}'$, то $\mathfrak{R}''$ мажорирует $\mathfrak{R}$. Всякое покрытие, содержащееся в покрытии $\mathfrak{R}$, мажорирует $\mathfrak{R}$.

Покрытие $\mathfrak{R}$ пространства E называется покрытием *конечного типа*, если каждое множество из $\mathfrak{R}$ пересекается лишь с конечным числом множеств из $\mathfrak{R}$.

Всякое конечное покрытие локально конечно и конечного типа. Всякое открытое покрытие конечного типа локально конечно; обращения этих двух предложений неверны. Локально конечное покрытие компактного пространства конечно.

Топологическое пространство E называется *паракомпактным*, если оно отделимо и для каждого его открытого покрытия $\mathfrak{R}$ существует локально конечное открытое покрытие $\mathfrak{R}'$, мажорирующее $\mathfrak{R}$. Всякое замкнутое подпространство паракомпактного пространства паракомпактно. Всякое паракомпактное пространство нормально, но существуют нормальные пространства, не являющиеся паракомпактными. Произведение паракомпактного и компактного пространств паракомпактно, но произведение двух паракомпактных пространств может не быть паракомпактным.

Для того чтобы локально компактное пространство E было паракомпактно, необходимо и достаточно, чтобы оно было топологической суммой семейства локально компактных пространств, счетных в бесконечности (гл. I, 2-е изд., § 10, теорема 5; 3-е изд., § 9, теорема 5). Тогда для каждого открытого покрытия $\mathfrak{R}$ пространства E существует мажорирующее его открытое покрытие $\mathfrak{R}'$ конечного типа, состоящее из относительно компактных множеств. Если E счетно в бесконечности, то можно, кроме того, добиться, чтобы $\mathfrak{R}'$ было счетным.

§ 9. Связность

1. Топологическое пространство E называют *связным*, если не существует разбиения E на два открытых (непустых по определению разбиения) множества. То же можно выразить, сказав, что не существует разбиения E на два замкнутых множества или

также что в E не существует открыто-замкнутых множеств, кроме самого E и пустого множества. Множество A в топологическом пространстве E называют *связным*, если подпространство A пространства E связно.

Числовая прямая $\mathbf{R}$ есть связное пространство; связные множества в $\mathbf{R}$ — интервалы.

Если A — какое-либо множество в пространстве E, то всякое связное множество в E, пересекающееся и с A и с $\complement A$, пересекается с границей A. В частности, в связном пространстве E всякое непустое множество, отличное от E, имеет по крайней мере одну граничную точку.

2. Если множество A в топологическом пространстве E связно, то связно и всякое множество $B \subset E$ такое, что $A \subset B \subset \bar{A}$.

Объединение семейства связных множеств, имеющих непустое пересечение, связно. Отсюда следует, что если $(A_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$ — последовательность связных множеств такая, что каждое A_i, где $0 \leqslant i \leqslant m-1$, пересекается с A_{i+1}, то объединение всех A_i связно.

3. Образ связного множества из E при непрерывном отображении E в E' есть связное множество в E'. Для того чтобы пространство E не было связным, необходимо и достаточно, чтобы существовало непрерывное отображение его на дискретное пространство, содержащее более одной точки.

Для того чтобы произведение непустых топологических пространств E_ι было связным, необходимо и достаточно, чтобы каждое E_ι было связным.

Всякое факторпространство связного пространства связно. Если R — отношение эквивалентности в топологическом пространстве E такое, что пространство E/R связно и каждый из классов эквивалентности по R связен, то E связно.

4. *Связной компонентой* точки x топологического пространства E называют наибольшее связное множество в E, содержащее x. *Связными компонентами* множества $A \subset E$ называют связные компоненты точек из A относительно подпространства A пространства E.

Для того чтобы пространство было связно, необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало со связной компонентой каждой своей

точки или, иначе, чтобы для каждой пары точек x, y пространства существовало связное множество, содержащее и x и y.

Топологическое пространство E называют *вполне несвязным*, если связная компонента каждой его точки состоит из одной этой точки. Множество A в пространстве E называют *вполне несвязным*, если подпространство A пространства E вполне несвязно. Дискретное пространство вполне несвязно, но вполне несвязное пространство может не иметь ни одной изолированной точки.

5. Всякое открыто-замкнутое множество в пространстве E содержит связную компоненту каждой своей точки; но пересечение открыто-замкнутых окрестностей точки $x \in E$ может отличаться от связной компоненты этой точки (см. n° 6).

В топологическом пространстве E связная компонента всякой его точки замкнута. Связные компоненты пространства E образуют его разбиение; если R — отношение эквивалентности, классами которого служат эти компоненты, то факторпространство E/R вполне несвязно.

В произведении $\prod_\iota F_\iota$ связная компонента точки $x = (x_\iota)$ есть произведение связных компонент точек x_ι в соответствующих пространствах F_ι.

6. Пусть V — какое-нибудь симметричное окружение для равномерного пространства E; конечная последовательность $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ точек из E называется *V-цепью*, если для каждого i такого, что $1 \leqslant i \leqslant n-1$, точки x_i и x_{i+1} близки порядка V; точки x_1 и x_n называются концами этой V-цепи и говорят, что они соединены ею. (Если E — метрическое пространство, структура которого определена расстоянием d, то ε-цепью для каждого $\varepsilon > 0$ называют V_ε-цепь, где V_ε — окружение, определяемое отношением $d(x, y) \leqslant \varepsilon$.)

Отношение «существует V-цепь, соединяющая x и y» есть отношение эквивалентности в E; класс эквивалентности $A_{x,V}$ точки x по этому отношению — открыто-замкнутое множество. Пересечение A_x множеств $A_{x,V}$, где V пробегает все симметричные окружения для E, есть замкнутое множество; A_x содержит связную компоненту точки x, но может не совпадать с ней. Однако если E компактно, то A_x совпадает со связной компонентой точки x

и с пересечением открыто-замкнутых окрестностей этой точки (гл. II, 2-е изд., § 4, предложение 3; 3-е изд., § 4, предложение 6).

Если E — компактное пространство и R — отношение эквивалентности в E, классами которого служат связные компоненты этого пространства, то факторпространство E/R компактно и вполне несвязно.

Если E — вполне несвязное локально компактное пространство, то множество всех открыто-замкнутых окрестностей каждой точки $x \in E$ образует фундаментальную систему окрестностей этой точки.

7. Топологическое пространство E называют *локально связным*, если всякая точка в E обладает фундаментальной системой связных окрестностей. Всякое открытое подпространство локально связного пространства локально связно. Для того чтобы пространство E было локально связно, необходимо и достаточно, чтобы всякая связная компонента непустого открытого множества в E была открытым множеством; тогда E является топологической суммой своих связных компонент. Числовая прямая $\mathbf{R}$ локально связна. Пространство может быть связным, не будучи локально связным, и обратно. Для того чтобы непустое пространство $\prod_\iota E_\iota$ было локально связно, необходимо и достаточно, чтобы все E_ι были локально связны и, за исключением конечного их числа, связны. Всякое факторпространство локально связного пространства локально связно (гл. I, 2-е изд., § 11, предложение 13; 3-е изд., § 11, предложение 12).

§ 10. Топологическая алгебра

1. *Топологической группой* называется множество, наделенное структурой группы и топологией, удовлетворяющей следующей аксиоме (в мультипликативных обозначениях):

(GT′) *Отображение* $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ *произведения* $G \times G$ *в* G *непрерывно.*

То же можно выразить, потребовав непрерывности двух отображений: $(x, y) \mapsto xy$ произведения $G \times G$ в G и $x \mapsto x^{-1}$ пространства G в себя. Симметрия $x \mapsto x^{-1}$ будет при этом гомеоморфизмом

G на себя; каковы бы ни были a и b из G, отображение $x \mapsto axb$ есть гомеоморфизм G на себя.

Говорят, что структура группы и топология в множестве G *согласуются*, если они удовлетворяют аксиоме (GT'). Дискретная топология в произвольной группе G согласуется с ее структурой группы. Топология и структура аддитивной группы числовой прямой $\mathbf{R}$ согласуются.

Если A — открытое (соотв. замкнутое) множество в G и x — произвольная точка из G, то множества xA, Ax и A^{-1} открыты (соотв. замкнуты) в G. Если A — открытое множество в G, а B — произвольное множество в G, то AB и BA открыты. Если V — окрестность нейтрального элемента e группы G, а A — произвольное множество в G, то AV и VA — окрестности A. Отметим, что если A и B — замкнутые множества в G, то AB не обязательно замкнуто в G. Однако если одно из множеств A, B компактно, а другое замкнуто, то AB замкнуто.

2. Если $\mathfrak{V}$ — фильтр окрестностей нейтрального элемента e топологической группы G, то фильтр окрестностей произвольной точки $a \in G$ совпадает с каждым из фильтров $a\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{V}a$. Пусть G — группа и $\mathfrak{V}$ — фильтр в ней; для того чтобы в G существовала согласующаяся с ее структурой группы топология $\mathscr{T}$, для которой $\mathfrak{V}$ служит фильтром окрестностей нейтрального элемента e, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{V}$ удовлетворял следующим аксиомам:

($\mathrm{GV_I}$) *Для каждого* $U \in \mathfrak{V}$ *существует* $V \in \mathfrak{V}$, *такое, что* $VV \subset U$.

($\mathrm{GV_{II}}$) *Каково бы ни было* $U \in \mathfrak{V}$, *также* $U^{-1} \in \mathfrak{V}$.

($\mathrm{GV_{III}}$) *Каковы бы ни были* $a \in G$ *и* $V \in \mathfrak{V}$, *также* $aVa^{-1} \in \mathfrak{V}$.

Тогда топология $\mathscr{T}$, определяемая фильтром $\mathfrak{V}$, единственна.

Для того чтобы базис фильтра $\mathfrak{B}$ в группе G обладал тем свойством, что фильтр с этим базисом удовлетворяет аксиомам ($\mathrm{GV_I}$), ($\mathrm{GV_{II}}$) и ($\mathrm{GV_{III}}$), необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{B}$ удовлетворял следующим аксиомам:

($\mathrm{GV'_I}$) *Для каждого* $U \in \mathfrak{B}$ *существует* $V \in \mathfrak{B}$ *такое, что* $VV \subset U$.

($\mathrm{GV'_{II}}$) *Для каждого* $U \in \mathfrak{B}$ *существует* $W \in \mathfrak{B}$ *такое, что* $W^{-1} \subset U$.

($\mathrm{GV}'_{\mathrm{III}}$) *Каковы бы ни были* $a \in G$ *и* $U \in \mathfrak{V}$, *существует* $V \in \mathfrak{V}$ *такое, что* $V \subset aUa^{-1}$.

Отметим, что условие ($\mathrm{GV}_{\mathrm{III}}$) (соотв. ($\mathrm{GV}'_{\mathrm{III}}$)) выполняется само собой для всякого фильтра (соотв. всякого базиса фильтра) в коммутативной группе G; напротив, если G не коммутативна, то ($\mathrm{GV}_{\mathrm{III}}$) не является следствием (GV_{I}) и ($\mathrm{GV}_{\mathrm{II}}$).

Окрестность V нейтрального элемента e топологической группы G называют *симметричной*, если $V^{-1} = V$; для каждой окрестности U элемента e множества $U \cup U^{-1}$, $U \cap U^{-1}$ и UU^{-1} являются его симметричными окрестностями. Симметричные окрестности точки e образуют фундаментальную систему окрестностей этой точки. В произвольной группе G базис фильтра $\mathfrak{V}$, состоящий из подгрупп группы G, удовлетворяет аксиомам ($\mathrm{GV}'_{\mathrm{I}}$) и ($\mathrm{GV}'_{\mathrm{II}}$); для того чтобы он был фундаментальной системой окрестностей e в топологии, согласующейся с заданной в G структурой группы, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял аксиоме ($\mathrm{GV}'_{\mathrm{III}}$), что всегда будет иметь место, если все подгруппы из $\mathfrak{V}$ нормальные.

3. Для того чтобы топологическая группа G была отделима, необходимо и достаточно, чтобы множество $\{e\}$, состоящее из одного нейтрального элемента, было замкнуто; то же можно выразить, сказав, что пересечение всех окрестностей e состоит из одной этой точки. Всякая отделимая группа вполне регулярна, но не обязательно нормальна.

Для того чтобы топология отделимой топологической группы G была метризуемой, необходимо и достаточно, чтобы существовала счетная фундаментальная система окрестностей нейтрального элемента e; тогда G называется метризуемой группой.

4. Пусть G и G' — топологические группы; *изоморфизм* G на G' есть биективное отображение $f\colon G \to G'$, являющееся одновременно изоморфизмом структуры группы G на G' (т. е. $f(x, y) = f(x)\, f(y)$, каковы бы ни были x и y из G) и гомеоморфизмом G на G' (т. е. взаимно непрерывным отображением). Для каждого $a \in G$ отображение $x \mapsto axa^{-1}$ есть автоморфизм группы G; он называется внутренним автоморфизмом. Если топология $\mathscr{T}$ согласуется со структурой группы в G, то она согласуется также со структурой группы

противоположной группы G°; симметрия $x \to x^{-1}$ есть изоморфизм топологической группы G на топологическую группу G°.

5. Пусть G и G' — топологические группы; *локальным изоморфизмом* G *в* G' называется гомеоморфизм f окрестности V нейтрального элемента группы G на окрестность V' нейтрального элемента группы G', обладающий следующими свойствами: 1° $f(x, y) = f(x) f(y)$ для каждой пары точек x, y из V таких, что $xy \in V$; 2° если g — отображение, обратное к f, то $g(x'y') = g(x')\, g(y')$ для каждой пары точек x', y' из V' таких, что $x'y' \in V'$ (откуда следует, что g есть локальный изоморфизм G' на G). Топологические группы G и G' называют *локально изоморфными*, если существует локальный изоморфизм G на G'. Изоморфные топологические группы G и G' локально изоморфны, однако существуют локально изоморфные, но не изоморфные топологические группы, например $\mathbf{R}$ и $\mathbf{T}$.

Гомеоморфизм f окрестности V нейтрального элемента группы G на окрестность V' нейтрального элемента группы G', удовлетворяющий условию 1° предыдущего определения, является продолжением некоторого локального изоморфизма G на G' (которые поэтому локально изоморфны). Допуская вольность речи, мы будем называть локальным изоморфизмом также всякое отображение окрестности V нейтрального элемента группы G в G' — сужение которого на некоторую окрестность $W \subset V$ элемента e является локальным изоморфизмом.

6. Если H — подгруппа топологической группы G, то топология, индуцируемая в H из G, согласуется со структурой группы, индуцируемой в H из G; тем самым H, наделенная этими двумя структурами, будет топологической группой. Ее замыкание $\overline{H}$ в G также будет подгруппой группы G; кроме того, если H — всюду плотная подгруппа в G, а K — нормальная подгруппа группы H, то $\overline{K}$ — нормальная подгруппа группы G.

Для того чтобы подгруппа топологической группы была дискретна, необходимо и достаточно, чтобы она содержала изолированную точку. Всякая дискретная подгруппа отделимой группы замкнута.

Для того чтобы подгруппа топологической группы G была открытой, необходимо и достаточно, чтобы она имела внутреннюю

точку. Всякая открытая подгруппа замкнута. Если V — симметричная окрестность нейтрального элемента топологической группы G, то подгруппа V^∞, которую порождает V, открыто-замкнута; в частности, она совпадает с G, если G связна.

В топологической группе G связная компонента K нейтрального элемента e есть замкнутая нормальная подгруппа; связной компонентой каждого $x \in G$ служит класс $xK = Kx$.

7. Если H — произвольная подгруппа топологической группы G, отношение эквивалентности $x^{-1}y \in H$ в G открыто; при наделении однородного пространства G/H фактортопологией топологии группы G по этому отношению эквивалентности отображение $(s, \dot{x}) \mapsto \dot{sx}$ произведения $G \times (G/H)$ в G/H непрерывно. Однородное пространство G/H всегда предполагается наделенным этой фактортопологией. Для того чтобы G/H было отделимым, необходимо и достаточно, чтобы H была замкнута в G. Если H — открытая подгруппа группы G, то G/H дискретно.

8. Если H — нормальная подгруппа топологической группы G, то фактортопология в факторгруппе G/H согласуется с ее структурой группы; тем самым G/H, наделенное этими двумя структурами, является топологической группой, в которой канонические образы окрестностей нейтрального элемента группы G образуют фильтр окрестностей нейтрального элемента. Если G метризуема и H замкнута в G, то G/H метризуема.

Если H — дискретная нормальная подгруппа группы G, то факторгруппа G/H локально изоморфна G.

Если H и K — нормальные подгруппы группы G и $H \subset K$, то топологические группы G/K и $(G/H)/(K/H)$ изоморфны.

Если H — нормальная подгруппа, а A — какая-либо подгруппа группы G, то канонический образ A в G/H изоморфен топологической группе AH/H, но вообще не изоморфен топологической группе $A/(A \cap H)$.

9. Для того чтобы представление топологической группы G в топологическую группу G' было непрерывно на G, необходимо и достаточно, чтобы оно было непрерывно в точке e (нейтральном элементе группы G).

Пусть f — непрерывное представление G в G' и $f = \psi \circ \dot{f} \circ \varphi$ — его каноническое разложение, так что φ — каноническое отобра-

жение G на G/H (где H — ядро f), а ψ — каноническое отображение $f(G)$ в G'; $\dot{f}$ — непрерывное биективное представление G/H на $f(G)$, но не обязательно взаимно непрерывное. f называется *строгим морфизмом* G в G', если f — изоморфизм топологической группы G/H на топологическую группу $f(G)$. Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы образ всякого открытого множества из G при отображении f был открытым множеством в $f(G)$. Это условие всегда выполнено, если G' — дискретная группа или если G — компактная группа, а G' отделима.

Пусть f — непрерывное представление топологической группы G в топологическую группу G', H — нормальная подгруппа группы G и g — представление G/H в $f(G)/f(H)$, получаемое факторизацией f. Представление g непрерывно; при этом, если f — строгий морфизм (соотв. изоморфизм) G на $f(G)$, то g — строгий морфизм (соотв. изоморфизм) G/H на $f(G)/f(H)$.

10. Пусть $(G_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство топологических групп. В множестве $G = \prod_{\iota\in I} G_\iota$ структура произведения групп G_ι и структура произведения топологий пространств G_ι согласуются; топологическая группа, получаемая наделением множества G этими двумя структурами, называется *произведением* топологических групп G_ι.

Для каждого разбиения $(J_\lambda)_{\lambda\in L}$ множества I топологическая группа G изоморфна произведению топологических групп $\prod_{\iota\in J_\lambda} G_\iota$.

Если H_ι для каждого $\iota\in I$ — подгруппа группы G_ι, то произведение топологических групп H_ι изоморфно подгруппе $\prod_{\iota\in I} H_\iota$ топологической группы $\prod_{\iota\in I} G_\iota$, с которой обычно и отождествляется. В частности, если $J\subset I$ и $J' = \complement J$, топологическая группа $G_J = \prod_{\iota\in J} G_\iota$ изоморфна нормальной подгруппе $G'_J = \left(\prod_{\iota\in J} G_\iota\right) \times \left(\prod_{\iota\in J'} \{e_\iota\}\right)$ группы G (где e_ι — нейтральный элемент группы G_ι). Проекция pr_J группы G на G_J есть строгий морфизм; факторгруппа G/G'_J изоморфна $G'_{J'}$, а значит, и $G_{J'}$.

Пусть G_1 и G_2 — топологические группы, а H_1 (соотв. H_2) — нормальная подгруппа группы G_1 (соотв. G_2); каноническое отображение $(G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$ на $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2)$ есть изоморфизм.

11. Пусть G — топологическая группа. Для каждой окрестности V ее нейтрального элемента e обозначим через V_d (соотв. V_s) множество тех пар $(x, y) \in G \times G$, для которых $yx^{-1} \in V$ (соотв. $x^{-1}y \in V$). Когда V пробегает множество всех окрестностей точки e в G, множества V_d (соотв. V_s) образуют фундаментальную систему окружений некоторой равномерной структуры в группе G, согласующейся с ее топологией и называемой *правой* (соотв. *левой*) *равномерной структурой* топологической группы G. Каково бы ни было множество $A \subset G$, $V_d(A) = VA$ (соотв. $V_s(A) = AV$), откуда следует, что замыкание $\bar{A}$ является пересечением множеств VA (соотв. AV), где V пробегает фильтр окрестностей e.

Правая и левая равномерные структуры топологической группы G вообще различны. Но когда G — коммутативная или компактная группа, они совпадают.

Если G метризуема, то ее правая (соотв. левая) равномерная структура метризуема; она может быть задана расстоянием d, *инвариантным* справа (соотв. слева), т. е. таким, что $d(xz, yz) = d(x, y)$ (соотв. $d(zx, zy) = d(x, y)$).

12. Если G — топологическая группа, то правые и левые переносы являются изоморфизмами правой равномерной структуры на себя, а также левой равномерной структуры на себя. Симметрия $x \mapsto x^{-1}$ есть изоморфизм правой равномерной структуры на левую равномерную структуру; заметим, что, напротив, она вообще не будет равномерно непрерывной в правой (или в левой) равномерной структуре. Также отображение $(x, y) \mapsto xy$ произведения $G \times G$ на G может не быть равномерно непрерывным в правой (или левой) равномерной структуре; однако это имеет место, когда G коммутативна или компактна.

Непрерывное представление топологической группы G в топологическую группу G' равномерно непрерывно при наделении G и G' правыми (соотв. левыми) равномерными структурами.

Если H — подгруппа топологической группы G, то равномерная структура, индуцируемая в H правой (соотв. левой) равно-

мерной структурой группы G, совпадает с правой (соотв. левой) равномерной структурой топологической группы H.

В произведении семейства (G_ι) топологических групп правая (соотв. левая) равномерная структура совпадает с произведением правых (соотв. левых) равномерных структур групп G_ι.

13. Топологическую группу G называют *полной*, если ее правая и левая равномерные структуры являются структурами полного пространства; впрочем, достаточно, чтобы одна из них была полна, тогда другая будет тоже полной.

Всякая замкнутая подгруппа полной группы полна. Произведение всякого семейства полных групп полно. Если G — полная метризуемая группа и H — ее замкнутая подгруппа, то факторгруппа G/H метризуема и полна (гл. IX, § 3, предложение 4); напротив, можно указать полную отделимую, но не метризуемую группу G, содержащую замкнутую подгруппу H такую, что G/H не полна.

Всякая локально компактная группа полна; всякая локально компактная подгруппа отделимой группы G замкнута в G.

Пусть G_1 и G_2 — полные отделимые топологические группы и H_1 (соотв. H_2) — всюду плотная подгруппа группы G_1 (соотв. G_2). Всякое непрерывное представление f группы H_1 в H_2 продолжается единственным образом до непрерывного представления $\tilde{f}$ группы G_1 в G_2; если f — изоморфизм H_1 на H_2, то $\tilde{f}$ — изоморфизм G_1 на G_2.

14. Для того чтобы отделимая топологическая группа G была изоморфна всюду плотной подгруппе полной группы $\hat{G}$, необходимо и достаточно, чтобы при симметрии $x \to x^{-1}$ образ всякого фильтра Коши относительно правой равномерной структуры в G был снова фильтром Коши относительно этой структуры (гл. III, § 3, теорема 1). Полная группа $\hat{G}$, называемая *пополнением* G, тогда единственна с точностью до изоморфизма. Отметим, что указанное условие всегда выполняется, когда G — коммутативная группа; однако имеются некоммутативные отделимые группы, для которых оно не выполнено.

Если G обладает пополнением $\hat{G}$, то замыкания в $\hat{G}$ окрестностей нейтрального элемента из G образуют фундаментальную систему окрестностей нейтрального элемента в $\hat{G}$.

15. Пусть E, F и G — полные отделимые коммутативные группы, а A и B — всюду плотные подгруппы соответственно в E и F. Всякое непрерывное билинейное отображение произведения $A \times B$ может быть продолжено по непрерывности до непрерывного билинейного отображения $E \times F$ в G (гл. III, 2-е изд., § 5, теорема 1; 3-е изд., § 6, теорема 1).

16. *Топологическим кольцом* называют множество A, наделенное структурой кольца и топологией, удовлетворяющими следующим аксиомам:

($\mathrm{AT_I}$) *Отображение* $(x, y) \mapsto x + y$ *произведения* $A \times A$ *в* A *непрерывно.*

($\mathrm{AT_{II}}$) *Отображение* $x \mapsto -x$ *кольца* A *в* A *непрерывно.*

($\mathrm{AT_{III}}$) *Отображение* $(x, y) \mapsto xy$ *произведения* $A \times A$ *в* A *непрерывно.*

Первые две аксиомы выражают, что топология кольца A согласуется с его структурой аддитивной группы.

Говорят, что структура кольца и топология, заданные в множестве A, *согласуются*, если они удовлетворяют аксиомам ($\mathrm{AT_I}$), ($\mathrm{AT_{II}}$) и ($\mathrm{AT_{III}}$). В произвольном кольце A дискретная топология согласуется со структурой кольца. Если A — коммутативное топологическое кольцо, то всякий полином от n переменных с коэффициентами из A непрерывен на A^n.

17. Пусть A — кольцо и $\mathfrak{V}$ — фильтр в A; для того чтобы в A существовала согласующаяся с его структурой кольца топология $\mathscr{T}$, для которой $\mathfrak{V}$ является фильтром окрестностей нуля, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{V}$ удовлетворял следующим условиям:

($\mathrm{GA_I}$) *Для каждого* $U \in \mathfrak{V}$ *существует* $V \in \mathfrak{V}$ *такое, что* $V + V \subset U$.

($\mathrm{GA_{II}}$) *Для каждого* $U \in \mathfrak{V}$ *также* $-U \in \mathfrak{V}$.

($\mathrm{AV_I}$) *Каковы бы ни были* $x_0 \in A$ *и* $V \in \mathfrak{V}$, *существует* $W \in \mathfrak{V}$ *такое, что* $x_0 W \subset V$ *и* $W x_0 \in V$.

($\mathrm{AV_{II}}$) *Для каждого* $V \in \mathfrak{V}$ *существует* $W \in \mathfrak{V}$ *такое, что* $WW \subset V$.

В частности, если A — кольцо и $\mathfrak{B}$ — базис фильтра в A состоящий из двусторонних идеалов, то в A существует согласующаяся с его структурой кольца топология $\mathscr{T}$, для которой $\mathfrak{B}$ служит фундаментальной системой окрестностей нуля.

18. Если H — подкольцо топологического кольца A, то топология, индуцируемая в H топологией пространства A, согласуется с индуцированной в H из A структурой кольца.

Если H — всюду плотное подкольцо топологического кольца A, а K — подкольцо (соотв. правый, левый, двусторонний идеал) в H, то его замыкание $\overline{K}$ в A является подкольцом (соотв. правым, левым, двусторонним идеалом) в A.

Если H — двусторонний идеал в A, то фактортопология топологии кольца A по отношению эквивалентности $x - y \in H$ согласуется со структурой кольца A/H.

Пусть $(A_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство топологических колец. В множестве $A = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ произведение топологий колец A_ι согласуется со структурой произведения колец A_ι; так определенное топологическое кольцо A называется произведением топологических колец A_ι.

19. Говоря о равномерной структуре топологического кольца A, всегда имеют в виду, если не оговорено противное, равномерную структуру его аддитивной группы; в частности, говорят, что A есть *полное* кольцо, если полна его аддитивная группа.

Всякое отделимое топологическое кольцо A изоморфно всюду плотному подкольцу полного отделимого кольца $\tilde{A}$, определенного с точностью до изоморфизма и называемого *пополнением* кольца A.

20. *Топологическим телом* называют множество K, наделенное структурой тела и топологией, согласующейся со структурой кольца в K и удовлетворяющей, кроме того, следующей аксиоме:

(КТ) *Отображение* $x \mapsto x^{-1}$ *мультипликативной группы* K^* *всех ненулевых элементов из* K *в себя непрерывно.*

Говорят, что структура тела и топология в множестве K *согласуются*, если структура кольца тела K и рассматриваемая топология согласуются и, кроме того, выполняется аксиома (КТ).

В произвольном теле K дискретная топология согласуется со структурой тела. Топология и структура тела числовой прямой $\mathbf{R}$ согласуются.

Если K — топологическое тело, то топология, индуцируемая из K в мультипликативной группе K^*, согласуется со структурой

этой группы. Каковы бы ни были элементы $a \neq 0$ и b тела K, отображение $x \mapsto ax + b$ (соотв. $x \mapsto xa + b$) есть гомеоморфизм K на себя. Если K коммутативно, то всякая рациональная дробь от n переменных с коэффициентами, принадлежащими K, непрерывна в каждой точке из K^n, в которой знаменатель дроби отличен от нуля.

Если H — подтело топологического тела K, то топология, индуцируемая в H из K, согласуется со структурой тела, индуцируемой в H из K; кроме того, и замыкание $\overline{H}$ тела H есть подтело тела K.

21. В топологическом теле K равномерная структура его аддитивной группы называется *аддитивной равномерной структурой* тела K; правая и левая равномерные структуры мультипликативной группы K^*, определенные в K^*, называют, допуская вольность речи, *мультипликативными равномерными структурами* тела K. В K^* эти две структуры вообще несравнимы со структурой, индуцируемой аддитивной равномерной структурой тела K.

Всякое отделимое топологическое тело K может быть рассматриваемо как всюду плотное подкольцо полного отделимого кольца $\hat{K}$; но K может обладать делителями нуля. Для того чтобы $\hat{K}$ было топологическим телом, необходимо и достаточно, чтобы при отображении $x \mapsto x^{-1}$ образ каждого фильтра Коши из K (относительно аддитивной структуры), не имеющего 0 своей точкой прикосновения, также был фильтром Коши в K.

22. *Абсолютным значением* на теле K называют отображение $x \mapsto |x|$ тела K в $\mathbf{R}$ со значениями $\geqslant 0$, удовлетворяющее следующим условиям:

($\mathrm{VM_I}$) $|x| = 0$ *равносильно* $x = 0$.

($\mathrm{VM_{II}}$) $|xy| = |x|\,|y|$, *каковы бы ни были* x, y *из* K.

($\mathrm{VM_{III}}$) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$, *каковы бы ни были* x, y *из* K.

Из этих аксиом вытекает, что $|1| = 1$ и $|-x| = |x|$ для всех $x \in K$. Функция $d(x, y) = |x - y|$ есть инвариантное расстояние на аддитивной группе K, и топология, которую оно определяет в K, согласуется с заданной структурой тела в K. Тело K, наделенное структурой, определяемой заданием на нем абсолют-

ного значения, называется *нормированным телом*; оно всегда считается наделенным топологией, определяемой заданным абсолютным значением.

23. Если в произвольном топологическом теле K положить $|0| = 0$ и $|x| = 1$ для всех $x \neq 0$, то этим на K определится абсолютное значение, называемое *несобственным*; топология, определяемая им в K, дискретна. Обратно, абсолютное значение на K, определяющее в K дискретную топологию, есть несобственное абсолютное значение.

В поле $\mathbf{R}$ вещественных чисел (соотв. в поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел, в теле $\mathbf{H}$ кватернионов) обычное абсолютное значение (соотв. евклидова норма) удовлетворяет аксиомам $(\mathrm{VM_I})$, $(\mathrm{VM_{II}})$, $(\mathrm{VM_{III}})$ и определяет в $\mathbf{R}$ топологию числовой прямой (соотв. топологию пространства $\mathbf{R}^2$ в $\mathbf{C}$, топологию пространства $\mathbf{R}^4$ в $\mathbf{H}$).

Если для рационального числа $x \neq 0$ обозначить через $\nu_p(x)$ показатель степени, в которой простое число p входит в разложение x на простые множители, то функция $|x|_p$, равная $p^{-\nu_p(x)}$ для $x \neq 0$ и 0 для $x = 0$, будет абсолютным значением на теле $\mathbf{Q}$ рациональных чисел; его называют *p-адическим абсолютным значением*.

24. Два абсолютных значения на теле K называют *эквивалентными*, если они определяют в K одну и ту же топологию. Для того чтобы не несобственные абсолютные значения $|x|_1$ и $|x|_2$ в K были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы $|x|_1 < 1$ влекло $|x|_2 < 1$; тогда существует число $\rho > 0$ такое, что $|x|_2 = |x|_1^{\rho}$ для всех x (гл. IX, § 3, предложение 5).

Обратно, если $|x|$ — абсолютное значение на K, то то же верно для $|x|^{\rho}$, где $0 < \rho < 1$.

25. Если K_0 — подтело нормированного тела K, то сужение на K_0 абсолютного значения из K есть абсолютное значение на K_0, и оно определяет в K_0 топологию, индуцируемую топологией тела K.

Если K — нормированное тело, то кольцо $\hat{K}$, являющееся его пополнением, есть тело, а функция $|x|$ продолжается по непрерывности до абсолютного значения на $\hat{K}$, определяющего топологию тела $\hat{K}$.

26. Пусть K — недискретное нормированное тело, $|t|$ — его абсолютное значение и E — левое векторное пространство над K; *нормой* на E называют отображение $x \mapsto p(x)$ пространства E в $\mathbf{R}$ со значениями $\geqslant 0$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

($\mathrm{NO_I}$) $p(x) = 0$ *равносильно* $x = 0$.

($\mathrm{NO_{II}}$) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ *для всех* x *и* y *в* E.

($\mathrm{NO_{III}}$) $p(tx) = |t| p(x)$ *для всех* $t \in K$ *и* $x \in E$.

Функция $d(x, y) = p(x - y)$ является инвариантным расстоянием на аддитивной группе E, и топология, определяемая им в E, согласуется со структурой аддитивной группы пространства E; кроме того, отображение $(t, x) \mapsto tx$ произведения $K \times E$ в E непрерывно в этой топологии. *Нормированным пространством* над нормированным телом K называют векторное пространство E над K, наделенное структурой, определяемой заданием на E нормы; такое пространство всегда считается наделенным топологией и равномерной структурой, определяемыми заданной нормой.

27. Нормы p и q на векторном пространстве E называют *эквивалентными*, если они определяют в E одну и ту же топологию. Для этого необходимо и достаточно, чтобы существовали числа $a > 0$ и $b > 0$ такие, что

$$ap(x) \leqslant q(x) \leqslant bp(x)$$

для всех $x \in E$.

°В пространстве $\mathbf{R}^n$ все нормы эквивалентны.°

28. Пусть E — нормированное пространство над нормированным телом K, p — норма на E и $\hat{E}$ — аддитивная топологическая группа, являющаяся пополнением топологической группы E. Функция $(t, x) \mapsto tx$ продолжается по непрерывности на $\hat{K} \times \hat{E}$ и определяет в $\hat{E}$ структуру векторного пространства над $\hat{K}$; норма p продолжается по непрерывности на $\hat{E}$ до нормы $\bar{p}$, определяющей топологию группы $\hat{E}$.

29. Если H — векторное подпространство нормированного пространства E, то сужение на H нормы из E является нормой на H, определяющей в H топологию, индуцированную топологией пространства E.

Предположим, кроме того, что H замкнуто, и пусть $\|x\|$ — норма на E. Если для каждого класса $\dot{x} = E/H$ положить $\|\dot{x}\| =$

$= \inf_{x \in \dot{x}} \| x \|$, то функция $\| \dot{x} \|$ будет нормой на векторном пространстве E/H, а топология, определяемая этой нормой,— фактортопологией топологии пространства E по H.

30. Пусть $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — конечное семейство нормированных пространств над нормированным телом K; для каждой точки $x = (x_i)$ векторного пространства $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ положим $\| x \| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \| x_i \|$; тогда функция $\| x \|$ будет нормой на E, определяющей в этом пространстве произведение топологий пространств E_i.

Для того чтобы полилинейное отображение f произведения $\prod_{i=1}^{n} E_i$ в нормированное пространство F было непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $a > 0$ такое, что

$$\| f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \| \leqslant a \| x_1 \| \| x_2 \| \ldots \| x_n \|,$$

каковы бы ни были точки $x_i \in E_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

31. Пусть K — недискретное нормированное поле и A — алгебра над K. Говорят, что норма $p(x)$ на A *согласуется* со структурой алгебры A, если топология, определяемая ею в A, согласуется со структурой кольца A. Алгебра A над K, наделенная структурой, определяемой нормой, согласующейся со структурой алгебры A, называется *нормированной алгеброй*.

Заменяя, если нужно, данную норму эквивалентной, можно всегда предполагать, что норма $\| x \|$ на нормированной алгебре A такова, что $\| xy \| \leqslant \| x \| \| y \|$ для всех x и y из A.

32. Пусть K — нормированное тело и K_0 — подтело его центра такое, что абсолютное значение на K_0 не дискретно; тогда K, наделенное нормой $| x |$, есть нормированная алгебра над K_0.

Пусть K — недискретное нормированное поле и $\mathbf{M}_n(K)$ — алгебра квадратных матриц $X = (x_{ij})$ порядка n над K; тогда $\| X \| = \sup_{i,j} | x_{ij} |$ будет нормой на $\mathbf{M}_n(K)$, согласующейся со структурой алгебры над K.

33. Пусть A — нормированная алгебра над не дискретным нормированным телом K. Пополнение $\hat{A}$ кольца A также наделено структурой алгебры над K; с другой стороны, норма из A

продолжается по непрерывности на $\hat{A}$ и согласуется со структурой алгебры в $\hat{A}$ над $\hat{K}$.

34. Пусть $\mathfrak{a}$ — замкнутый двусторонний идеал в нормированной алгебре A; в факторалгебре $A/\mathfrak{a}$ норма $\| \dot{x} \| = \inf_{x \in \dot{x}} \| x \|$ согласуется со структурой алгебры $A/\mathfrak{a}$.

Пусть $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — конечное семейство нормированных алгебр над нормированным телом K; для каждого элемента $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ алгебры $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ положим $\| x \| = \sup \| x_i \|$; тогда $\| x \|$ будет нормой на A, согласующейся с его структурой алгебры.

35. Пусть A — полная нормированная алгебра над не дискретным полным нормированным телом. Если A обладает единичным элементом e, а норма $\| x \|$ на A такова, что $\| xy \| \leqslant \| x \| \| y \|$, то $e - z$ обратимо в A для каждого $z \in A$ с $\| z \| < 1$. Таким образом, мультипликативная группа G обратимых элементов алгебры A есть открытое множество в A; кроме того, топология, индуцируемая в G из A, согласуется со структурой группы в G, и так определенная топологическая группа G полна (гл. IX, § 3, предложение 14).

§ 11. Бесконечные суммы и произведения

1. Пусть G — отделимая коммутативная топологическая группа с аддитивной записью и $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство ее точек. Для каждого конечного множества $J \subset I$ положим $s_J = \sum_{\iota \in J} x_\iota$ (причем по условию $s_\varnothing = 0$), и пусть $\mathfrak{F}(I)$ — множество всех конечных подмножеств множества I, фильтрующееся по отношению $\subset$. Семейство $(x_\iota)_{\iota \in I}$ называют *суммируемым*, если отображение $J \mapsto s_J$ множества $\mathfrak{F}(I)$ в G имеет предел s по фильтру сечений множества $\mathfrak{F}(I)$; этот предел называется *суммой* семейства $(x_\iota)_{\iota \in I}$ и обозначается $\sum_{\iota \in I} x_\iota$ (или просто $\sum_{\iota} x_\iota$, или даже $\sum x_\iota$).

2. Если $(x_\iota)_{\iota \in I}$ суммируемо, то для каждой окрестности V нуля в G существует конечное множество $J_0 \subset I$ такое, что $\sum_{\iota \in H} x_\iota \in$

$\in V$, каково бы ни было конечное множество $H \subset I$, не пересекающееся с J_0 (критерий Коши); это условие достаточно, если G — полная группа. В частности, если семейство $(x_\iota)_{\iota \in I}$ суммируемо, то $\lim x_\iota = 0$ по фильтру дополнений конечных подмножеств множества I; если начало в G обладает счетной фундаментальной системой окрестностей, то множество индексов ι, для которых $x_\iota \neq 0$, необходимо счетно.

Пусть E — нормированное пространство над нормированным телом K. Семейство (x_ι) точек из E называют *абсолютно суммируемым*, если семейство $(\| x_\iota \|)$ их норм суммируемо в $\mathbf{R}$; для этого необходимо и достаточно, чтобы множество всех конечных частичных сумм семейства $(\| x_\iota \|)$ было ограниченным в $\mathbf{R}$. Если E полно, то всякое абсолютно суммируемое семейство в E суммируемо; это достаточное условие является также необходимым, если $K = \mathbf{R}$, а E имеет конечную размерность над $\mathbf{R}$.

3. В полной отделимой группе G всякое подсемейство $(x_\iota)_{\iota \in J}$ суммируемого семейства $(x_\iota)_{\iota \in I}$ суммируемо; пусть $s_J = \sum_{\iota \in J} x_\iota$. Если $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ — какое-либо разбиение множества I то семейство s_{J_λ} суммируемо в G и имеет суммой $\sum_{\iota \in I} x_\iota$ (ассоциативность суммы) (гл. III, 2-е изд. § 4, теорема 2; 3-е изд., § 5, теорема 2).

Обратно, если $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ — конечное разбиение множества I и каждое подсемейство $(x_\iota)_{\iota \in J_\lambda}$ суммируемо, то семейство $(x_\iota)_{\iota \in I}$ суммируемо.

4. Пусть $G = \prod_{\lambda \in L} G_\lambda$ — произведение семейства отделимых коммутативных групп. Для того чтобы семейство $(x_\iota)_{\iota \in I}$ точек из G было суммируемым, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\lambda \in L$ было суммируемо семейство $(\mathrm{pr}_\lambda x_\iota)_{\iota \in I}$; если $s_\lambda \in G_\lambda$ — его сумма, то $s = (s_\lambda)$ — сумма семейства (x_ι).

Пусть f — непрерывное представление отделимой коммутативной группы G в отделимую коммутативную группу G'. Если (x_ι) — суммируемое семейство в G, то $(f(x_\iota))$ — суммируемое семейство в G' и

$$\sum_\iota f(x_\iota) = f\left(\sum_\iota x_\iota\right).$$

Пусть (x_ι) и (y_ι) — суммируемые семейства в группе G с одним и тем же множеством индексов; тогда семейства (nx_ι) (где $n \in \mathbf{Z}$) и $(x_\iota + y_\iota)$ суммируемы и

$$\sum_\iota (nx_\iota) = n \sum_\iota x_\iota, \text{ а } \sum_\iota (x_\iota + y_\iota) = \sum_\iota x_\iota + \sum_\iota y_\iota.$$

5. Пусть $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ — последовательность точек в отделимой коммутативной топологической группе G с аддитивной записью; положив $s_n = \sum_{p=0}^{n} x_p$, имеем, обратно, $x_0 = s_0$ и $x_n = s_n - s_{n-1}$ для $n \geqslant 1$. *Рядом с общим членом* x_n называют пару последовательностей (x_n), (s_n), связанных указанным образом. Ряд с общим членом x_n называют *сходящимся*, если сходится последовательность (s_n); ее предел называется *суммой ряда* и обозначается $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

6. Для того чтобы ряд с общим членом x_n был сходящимся, необходимо, чтобы последовательность (s_n) была последовательностью Коши, т. е. чтобы для каждой окрестности V начала в G существовало такое целое n_0, что $s_{n+p} - s_n = \sum_{i=n+1}^{n+p} x_i \in V$, каковы бы ни были целые $n \geqslant n_0$ и $p \geqslant 0$. Если группа G полна, то это необходимое условие также достаточно.

Если ряд с общим членом x_n сходится, то, в частности, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$; но это необходимое условие сходимости ни в коей мере не является достаточным, даже если G полна (и, например, $G = \mathbf{R}$).

7. Ряд с общим членом x_n называется *коммутативно сходящимся*, если для каждой перестановки σ множества $\mathbf{N}$ целых чисел $\geqslant 0$ ряд с общим членом $x_{\sigma(n)}$ сходится. Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы последовательность (x_n) была суммируема, и тогда $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n\in\mathbf{N}} x_n$ (гл. III, 2-е изд., § 4, предложение 9; 3-е изд., § 5, предложение 9). Если E — полное нормированное пространство и последовательность (x_n) абсолютно суммируема, то ряд с общим членом x_n коммутативно сходится; он называется тогда *абсолютно сходящимся*. В конечномерном векторном пространстве над $\mathbf{R}$ всякий коммутативно схо-

дящийся ряд абсолютно сходится (иначе говоря, эти понятия равносильны); однако существуют ряды сходящиеся, но не абсолютно сходящиеся.

8. Пусть (k_n) — строго возрастающая последовательность целых чисел $\geqslant 0$; если в группе G ряд с общим членом x_n сходится, то ряд с общим членом x_{k_n} не обязательно сходится. Однако для каждого m ряд с общим членом x_{m+n} $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ сходится; его сумма r_m обозначается $\sum_{n=m}^{\infty} x_n$ и называется m-м *остатком* ряда с общим членом x_n; r_m стремится к 0, когда m стремится к $+\infty$.

9 Пусть (k_n) — строго возрастающая последовательность целых чисел $\geqslant 0$; если ряд с общим членом x_n сходится и $u_n = \sum_{p=k_{n-1}}^{k_n-1} x_p$, то ряд с общим членом u_n сходится и $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ (ограниченная ассоциативность рядов).

10. Пусть $G = \coprod_{\lambda \in L} G_\lambda$ — произведение отделимых коммутативных групп. Для того чтобы ряд с общим членом $x_n \in G$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы ряд с общим членом $\mathrm{pr}_\lambda x_n$ сходился для каждого $\lambda \in L$; если s_λ — его сумма, то $s = (s_\lambda)$ — сумма ряда с общим членом x_n.

Пусть f — непрерывное представление отделимой коммутативной группы G в отделимую коммутативную группу G'. Если ряд с общим членом $x_n \in G$ сходится, то ряд с общим членом $f(x_n)$ тоже сходится и его сумма равна $f\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right)$.

Если ряды с общими членами x_n и y_n сходятся, то сходятся ряды с общими членами kx_n (где k — произвольное целое рациональное число) и $x_n + y_n$, причем

$$\sum_{n=0}^{\infty} (kx_n) = k \sum_{n=0}^{\infty} x_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Отметим, наконец, что если (x_n) и (y_n) — такие две последовательности, что $x_n = y_n$ для всех, кроме конечного числа, индексов, то сходимость ряда с общим членом (x_n) влечет сходимость ряда с общим членом (y_n).

11. Все предыдущие результаты непосредственно переводятся на мультипликативные обозначения; тогда говорят не о сумми-

руемых, а о *перемножаемых* семействах, не о ряде с общим членом x_n, а о *бесконечном произведении с общим множителем* x_n, не о сходящемся ряде, а о *сходящемся произведении*.

12. Пусть A — нормированная алгебра над коммутативным нормированным телом K, и $\| x \|$ — ее норма. Предположим, что $\| xy \| \leqslant \| x \| \| y \|$ и A обладает единичным элементом e. Пусть $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ — бесконечная последовательность точек из A; всякое конечное множество $J \subset \mathbf{N}$ совершенно упорядочено порядком из N; положим $p_J = \prod_{n \in J} x_n$ (произведение, равное $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}$, если $(i_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ — последовательность индексов $n \in J$, расположенная в порядке возрастания). Последовательность (x_n) называется *перемножаемой*, если отображение $J \mapsto p_J$ имеет предел по фильтру сечений множества $\mathfrak{F}(\mathbf{N})$ всех конечных подмножеств множества N (фильтрующегося по отношению $\subset$); этот предел называется *произведением* последовательности (x_n) и обозначается $\prod_{n \in \mathbf{N}} x_n$ (или просто $\prod_{\mathbf{n}} x_n$).

13. Пусть A — полная нормированная алгебра. Если последовательность (x_n) перемножаема в A и имеет своим произведением обратимый элемент из A, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечное множество $J_0 \subset \mathbf{N}$ такое, что для всякого конечного множества $H \subset \mathbf{N}$, не пересекающегося с J_0, $\| e - p_H \| \leqslant \varepsilon$. Обратно, если последовательность (x_n) удовлетворяет этому условию, то она перемножаема; при этом, если каждое x_n обратимо, то обратимо и $\prod_n x_n$.

Если последовательность (x_n) перемножаема и имеет своим произведением обратимый элемент из A, то всякая ее подпоследовательность (x_{n_k}) перемножаема.

14. Пусть A — полная нормированная алгебра; если (u_n) — абсолютно сходящийся ряд в A, то последовательность $(e + u_n)$ перемножаема в A (гл. IX, Приложение, теорема 2); при этом, если каждый из элементов $e + u_n$ обратим (соотв. не является делителем нуля), то то же верно для $\prod_n (e + u_n)$.

Обратно, если A — нормированная алгебра конечного ранга над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$ и $(e + u_n)$ — перемножаемое семейство в A с обратимым произведением, то ряд с общим членом u_n абсолютно сходится.

15. Пусть (x_n) — произвольная последовательность в нормированной алгебре A и $p_n = \prod_{k=0}^{n} x_k$ для каждого n; *бесконечным произведением с общим членом* x_n называется пара последовательностей (x_n) и (p_n); его называют *сходящимся*, если последовательность (p_n) сходится в A; предел этой последовательности называется тогда *произведением* последовательности (x_n) и обозначается $\mathop{\mathrm{P}}_{n=0}^{\infty} x_n$. Если (x_n) перемножаема, то бесконечное произведение с общим членом x_n сходится и $\mathop{\mathrm{P}}_{n=0}^{\infty} x_n = \prod_{n\in\mathbf{N}} x_n$.

16. Пусть A — полная нормированная алгебра. Если бесконечное произведение с общим членом $x_n \in A$ сходится и $\mathop{\mathrm{P}}_{n=0}^{\infty} x_n$ обратимо, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что $\| \prod_{k=m}^{n} x_k - e \| \leqslant \varepsilon$ как только $n_0 \leqslant m \leqslant n$. Обратно, если последовательность (x_n) удовлетворяет этому условию, то бесконечное произведение с общим членом x_n сходится; при этом, если каждое x_n обратимо, то $\mathop{\mathrm{P}}_{n=0}^{\infty} x_n$ обратимо.

В частности, если бесконечное произведение с общим членом x_n сходится и $\mathop{\mathrm{P}}_{n=0}^{\infty} x_n$ обратимо, то $\lim_{n\to\infty} x_n = e$. При тех же условиях бесконечное произведение с общим членом x_{n+m} сходится для каждого целого $m \geqslant 0$; оно обозначается $\mathop{\mathrm{P}}_{n=m}^{\infty} x_n$ и называется m-м *остатком* бесконечного произведения с общим членом x_n; он стремится к e, когда m стремится к $+\infty$.

Пусть (k_n) — строго возрастающая последовательность целых чисел $\geqslant 0$; если бесконечное произведение с общим членом (x_n) сходится и $u_n = \prod_{p=k_{n-1}}^{k_n-1} x_p$, то бесконечное произведение с общим членом u_n сходится и $\prod_{n=0}^{\infty} u_n = \prod_{n=0}^{\infty} x_n$.

§ 12. Аддитивные группы в $\mathbf{R}^n$

1. *Рангом* множества A в векторном пространстве $\mathbf{R}^n$ (над полем $\mathbf{R}$) называется размерность $r(A) \leqslant n$ подпространства в $\mathbf{R}^n$, порождаемого множеством A, или, что то же,— максимальное число векторов, принадлежащих A и образующих свободную систему.

Пусть G — замкнутая подгруппа аддитивной группы $\mathbf{R}^n$; существует наибольшее векторное подпространство V (необходимо замкнутое), содержащееся в G; для каждого векторного подпространства W в $\mathbf{R}^n$, дополнительного к V, пересечение $W \cap G$ является дискретной подгруппой группы $\mathbf{R}^n$, а G — прямой суммой V и $W \cap G$. Размерность $d(G)$ подпространства V называется *размерностью* группы G. Если G имеет ранг r и размерность p, то $W \cap G$ изоморфно дискретной группе $\mathbf{Z}^{r-p}$. Другими словами, существует базис $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ пространства $\mathbf{R}^n$ такой, что $a_i \in G$, если $1 \leqslant i \leqslant r$, $a_i \in V$, если $1 \leqslant i \leqslant p$, и G совпадает с множеством векторов $\sum_{i=1}^{p} t_i a_i + \sum_{j=p+1}^{r} n_j a_j$, где t_i принимают все вещественные значения, а n_j — все целые значения (гл. VII, § 1, следствие 1 теоремы 2); таким образом, существует автоморфизм пространства $\mathbf{R}^n$, преобразующий G в группу $\mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^{r-p}$ — прямую сумму векторного подпространства, порождаемого первыми p векторами канонического базиса, и аддитивной подгруппы, порождаемой следующими $r - p$ векторами.

В частности, всякая замкнутая подгруппа аддитивной группы $\mathbf{R}$ либо совпадает с $\mathbf{R}$, либо сводится к 0, либо имеет вид $a\mathbf{Z}$, где $a \neq 0$.

2. Для каждой подгруппы G группы $\mathbf{R}^n$ обозначим через G^* множество всех точек $u = (u_i)$ из $\mathbf{R}^n$ таких, что $\sum_{i=1}^{n} u_i x_i$ — целое

число для каждой точки $x = (x_i) \in G$; G^* есть подгруппа группы $\mathbf{R}^n$ и называется *подгруппой, ассоциированной с* G; если G и H — подгруппы группы $\mathbf{R}^n$ такие, что $G \subset H$, то $H^* \subset G^*$. Для каждой подгруппы G группы $\mathbf{R}^n$ ассоциированная подгруппа G^* замкнута; при этом $(\overline{G})^* = G^*$ и $(G^*)^* = \overline{G}$. Если G — замкнутая подгруппа группы $\mathbf{R}^n$, то $r(G^*) = n - d(G)$ и $d(G^*) = n - r(G)$. Для каждой пары замкнутых подгрупп G_1, G_2 группы $\mathbf{R}^n$ имеем $(G_1 + G_2)^* = G_1^* \cap G_2^*$ и $(G_1 \cap G_2)^* = \overline{G_1^* + G_2^*}$.

3. Предыдущие результаты влекут следующую *теорему об аппроксимации.*

Пусть $a_i = (a_{ij})$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ m точек из $\mathbf{R}^n$ и $b = (b_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ точка из $\mathbf{R}^n$. Для того чтобы при каждом $\varepsilon > 0$ существовало m целых чисел q_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ и n целых чисел p_j таких, что

$$| q_1 a_{1j} + q_2 a_{2j} + \dots + q_m a_{mj} - p_j - b_j | \leqslant \varepsilon \qquad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждой конечной последовательности n целых чисел (r_j) $(1 \leqslant j \leqslant n)$ таких, что числа $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ — целые, число $\sum_{j=1}^{n} b_j r_j$ также было целым. Это условие всегда выполняется, если все b_j равны нулю. Для того чтобы оно выполнялось для всех точек $b = (b_j)$ из $\mathbf{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы не существовало никакой конечной последовательности (r_j) n целых чисел, из которых не все равны нулю, для которой каждое из m чисел $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j$ было бы целым. В частности, пусть θ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — n вещественных чисел, из которых по крайней мере одно иррационально; тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существуют целое число q и n целых чисел p_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ такие, что

$$| q\theta_i - p_i | \leqslant \varepsilon \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

где по крайней мере одна из левых частей неравенств отлична от нуля.

4. Через $\mathbf{T}$ обозначается факторгруппа $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, называемая *(аддитивной) группой вещественных чисел, приведенных по модулю* 1, или также *одномерным тором.* Это компактная, связная

и локально связная группа; топологическое пространство T гомеоморфно окружности $x^2 + y^2 = 1$, вещественной проективной прямой $P_1(R)$ и факторпространству интервала [0, 1] из R, получаемому при отождествлении его концов.

Всякая отделимая факторгруппа группы R^n изоморфна группе вида $R^p \times T^q$, где $p + q \leqslant n$. Всякая группа вида $R^p \times T^q$ локально изоморфна R^{p+q}; обратно, всякая связная группа G, локально изоморфная R^n, изоморфна группе вида $R^p \times T^{n-p}$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$.

5. Всякая замкнутая подгруппа группы T^n изоморфна группе вида $T^h \times F$ $(0 \leqslant h \leqslant n)$, где F — такая конечная коммутативная группа, что наименьшее число циклических подгрупп, прямой суммой которых она является, не превосходит $n - h$. Всякая отделимая факторгруппа группы T^n изоморфна группе вида T^k $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

В частности, всякая замкнутая подгруппа группы T, не совпадающая с T, есть конечная циклическая группа. Всякая отделимая факторгруппа группы T, не сводящаяся к нейтральному элементу, изоморфна T.

6. Функция f, определенная на R^n и принимающая значения в произвольном множестве E, называется *периодической*, если в R^n существует вектор $a \neq 0$ такой, что $f(x + a) = f(a)$ для всех $x \in R^n$; всякая точка $a \in R^n$, удовлетворяющая этому соотношению, называется *периодом* функции f. Множество G этих периодов образует подгруппу в R^n, по предположению не сводящуюся к 0.

Если f — непрерывное периодическое отображение R^n в отделимое топологическое пространство E, то группа G его периодов замкнута; если V —наибольшее векторное подпространство, содержащееся в G, то f постоянно на всяком классе по модулю V, так что f определяется своим сужением на всякое подпространство W, дополнительное к V. Поэтому достаточно изучить непрерывные периодические функции с дискретной группой периодов G; если q — ранг G, то f называется *q-периодической* функцией, а всякая свободная система q векторов, порождающая G,— *главной системой периодов* функции f. Если (a_i) и (b_i) — две главные системы периодов функции f, то каждая из них получается из другой линейным преобразованием с целыми коэффициентами, определитель которого равен $+1$ или -1.

Пусть G —замкнутая подгруппа группы $\mathbf{R}^n$ и φ — каноническое отображение $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{R}^n/G$; тогда $g \mapsto g \circ \varphi$ есть биективное отображение множества всех отображений $\mathbf{R}^n/G$ в E на множество всех периодических отображений $\mathbf{R}^n$ в E, группа периодов которых содержит G. Если E — топологическое пространство, то для непрерывности g необходимо и достаточно, чтобы $g \circ \varphi$ было непрерывно.

7. Всякое непрерывное представление аддитивной группы $\mathbf{R}^m$ в аддитивную группу $\mathbf{R}^n$ есть линейное отображение $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$.

В частности, если G — топологическая группа, изоморфная $\mathbf{R}$, то для каждого элемента $a \in G$ существует, и притом единственное, непрерывное представление f_a группы $\mathbf{R}$ в G такое, что $f_a(1) = a$; если a отлично от нейтрального элемента группы G, то это представление есть изоморфизм $\mathbf{R}$ на G.

8. Пусть V — окрестность нуля в $\mathbf{R}^n$ и f — ее непрерывное отображение в топологическую группу G (коммутативную или нет, записываемую мультипликативно) такое, что $f(x + y) = f(x) f(y)$ для каждой пары векторов $x \in V$, $y \in V$ таких, что $x + y \in V$. Тогда существует, и притом единственное, представление $\mathbf{R}^n$ в G, совпадающее с f во всех точках некоторой окрестности нуля W (гл VII, § 2, предложение 2).

В частности, если f — локальный изоморфизм группы $\mathbf{R}^n$ в топологическую группу G, то существует, и притом единственный, строгий морфизм группы $\mathbf{R}^n$ на открытую подгруппу группы G, совпадающий с f во всех точках некоторой окрестности нуля.

9. Пусть G — топологическая группа, F — ее дискретная подгруппа и φ — канонический гомоморфизм G на G/F. Для каждого непрерывного представления f группы $\mathbf{R}^n$ в G/F существует, и притом единственное, непрерывное представление u группы $\mathbf{R}^n$ в G такое, что $f = \varphi \circ u$. В частности, всякое непрерывное представление f группы $\mathbf{R}^m$ в группу $\mathbf{T}^n$ (отождествленную с $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$) имеет вид $\varphi \circ u$, где φ — канонический гомоморфизм $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{T}^n$, а u — линейное отображение $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$ (определяемое единственным образом заданием f). В частности, при $m = n = 1$, всякое непрерывное представление f группы $\mathbf{R}$ в $\mathbf{T}$ имеет вид $x \mapsto \varphi(ax)$, где φ — канонический гомоморфизм $\mathbf{R}$ на $\mathbf{T}$, а a —

вещественное число, определяемое заданием f; для того чтобы это представление было строгим морфизмом, необходимо и достаточно, чтобы $a \neq 0$.

10. Пусть φ (соотв. ψ) — канонический гомоморфизм $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{T}^n$ (соотв. $\mathbf{R}^p$ на $\mathbf{T}^p$); для того чтобы f было непрерывным представлением $\mathbf{T}^n$ в $\mathbf{T}^p$, необходимо и достаточно, чтобы существовало линейное отображение u пространства $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^p$ такое, что $f \circ \varphi = \psi \circ u$ и $u(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^p$. Для того чтобы f было изоморфизмом $\mathbf{T}^n$ в $\mathbf{T}^p$, необходимо и достаточно, чтобы u было биективным линейным отображением $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{R}^p$ и все инвариантные множители подгруппы $u(\mathbf{Z}^n)$ относительно $\mathbf{Z}^p$ были равны 1.

В частности; всякий изоморфизм группы $\mathbf{T}^n$ в себя является ее автоморфизмом, получаемым факторизацией из линейного отображения u пространства $\mathbf{R}^n$ на себя, сужение которого на $\mathbf{Z}^n$ является автоморфизмом этой группы. Это означает еще, что элементы матрицы преобразования u относительно канонического базиса пространства $\mathbf{R}^n$ должны быть целыми, а ее определитель равен $+1$ или -1.

В частности, единственные изоморфизмы $\mathbf{T}$ в себя — это тождественное отображение и симметрия $x \mapsto -x$.

11. Топологическая группа G, в которой существует окрестность нейтрального элемента, гомеоморфная открытому интервалу из $\mathbf{R}$, локально изоморфна $\mathbf{R}$ (гл. V, § 3, теорема 1). Это свойство не распространяется на группы $\mathbf{R}^n$ с $n > 1$.

В частности, всякая связная группа G, в которой существует окрестность нейтрального элемента, гомеоморфная открытому интервалу из $\mathbf{R}$, изоморфна $\mathbf{R}$ или $\mathbf{T}$.

Например, мультипликативная группа $\mathbf{R}_+^*$ вещественных чисел >0 изоморфна аддитивной группе $\mathbf{R}$; для каждого $a > 0$ единственное непрерывное представление f_a группы $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}_+^*$ такое, что $f_a(1) = a$, обозначается a^x; при $a \neq 1$ это — изоморфизм $\mathbf{R}$ на $\mathbf{R}_+^*$; обратный изоморфизм обозначают тогда $\log_a x$.

Точно так же мультипликативная группа $\mathbf{U}$ всех комплексных чисел с абсолютным значением 1 изоморфна аддитивной группе $\mathbf{T}$. Через $e(x)$ обозначается непрерывное представление $\mathbf{R}$ на $\mathbf{U}$, для которого $e(1/4) = i$; его главный период равен 1, и всякий строгий морфизм $\mathbf{R}$ на $\mathbf{U}$ имеет вид $x \mapsto e(x/a)$, где $a \neq 0$.

12. Пусть E — полная нормированная алгебра над полем $\mathbf{R}$, обладающая единичным элементом, и f — непрерывное представление аддитивной группы $\mathbf{R}$ в мультипликативную группу G обратимых элементов алгебры E. Тогда f дифференцируемо в каждой точке из $\mathbf{R}$ и $f'(x) = f(x)f'(0)$ (Книга IV, гл. III, § 1, теорема 1).

Этот результат приводит к следующему определению чисел e и π: e — это единственное число $a > 0$, для которого производная функции a^x равна a^x; с другой стороны, $e'(x) = kie(x)$, где k — некоторое число >0, и полагаем $\pi = k/2$.

Мультипликативная группа $\mathbf{C}^*$ всех комплексных чисел $\neq 0$ есть топологическая группа, изоморфная $\mathbf{R} \times \mathbf{T}$; всякий строгий морфизм $\mathbf{R}^2$ на $\mathbf{C}^*$ имеет вид $(x, y) \mapsto e^{\alpha x+\beta y}e(\gamma x + \delta y)$, где α, β, γ, δ — вещественные числа, для которых $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Такой строгий морфизм можно рассматривать как отображение $z \mapsto f(z)$ поля $\mathbf{C}$ в себя ($z = x + iy$); в частности, строгий морфизм $x + iy \mapsto e^x e(y/2\pi)$ обозначается e^z или $\exp z$. Всякий строгий морфизм $\mathbf{R}^2$ на $\mathbf{C}^*$, являющийся дифференцируемым отображением $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}$, имеет вид $z \mapsto \exp(az)$, где a — некоторое комплексное число. Поэтому отображение $z \mapsto \exp z$ есть единственный дифференцируемый строгий морфизм $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}^*$, сводящийся к e^x на вещественной оси.

§ 13. Функционалные пространства

1. Пусть E — произвольное множество, F — равномерное пространство, не сводящееся к одной точке, $\mathscr{F}(E; F)$ — множество всех отображений E в F и $\mathfrak{S}$ — непустое множество подмножеств множества E. Для каждого $A \in \mathfrak{S}$ и каждого окружения V для F пусть $W(A, V)$ — множество тех пар (u, v) отображений E в F, для которых $(u(x), v(x)) \in V$ при всех $x \in A$. Фильтр, порождаемый множествами $W(A, V)$ в $\mathscr{F}(E, F) \times \mathscr{F}(E \times F)$, когда A пробегает $\mathfrak{S}$, а V — фильтр окружений для F, является фильтром окружений некоторой равномерной структуры в $\mathscr{F}(E, F)$, которая называется *равномерной структурой равномерной сходимости на множествах из* $\mathfrak{S}$; топология, порождаемая этой структурой, называется *топологией равномерной сходимости на множествах из* $\mathfrak{S}$. Для того чтобы фильтр Φ (соотв. последовательность (u_n)) в $\mathscr{F}(E, F)$ сходился в этой топологии к $v \in \mathscr{F}(E, F)$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого множества $A \in \mathfrak{S}$ и каждого

окружения V для F существовало множество $M \in \Phi$ (соотв. целое число n_0) такое, что $(u(x), v(x)) \in V$ для всех $x \in A$ (соотв. $(u_n(x), v(x)) \in V$ для всех $x \in A$), каково бы ни было $u \in M$ (соотв. каково бы ни было $n \geqslant n_0$); тогда говорят, что Φ (соотв. (u_n)) *равномерно сходится к* v *на всяком множестве* $A \in \mathfrak{S}$. Отсюда сразу получается определение *ряда, равномерно сходящегося на всяком множестве из* $\mathfrak{S}$, и *семейства, равномерно суммируемого на всяком множестве из* $\mathfrak{S}$, если F наделено коммутативным и ассоциативным законом композиции, записываемым аддитивно.

2. Важнейшие примеры структур равномерной сходимости таковы:

а) При ем за $\mathfrak{S}$ множество всех конечных подмножеств множества E; соответствующая равномерная структура (соотв. топология) называется тогда *равномерной структурой* (соотв. *топологией*) *простой сходимости*; множество $\mathscr{F}(E, F)$, наделенное этой равномерной структурой, есть не что иное, как равномерное пространство F^E. Если фильтр Φ в $\mathscr{F}(E, F)$ сходится к v в равномерной структуре простой сходимости, то говорят, что он *просто сходится* к v.

б) Примем за $\mathfrak{S}$ множество, образованное одним E; соответствующая равномерная структура (соотв. топология) называется тогда *равномерной структурой* (соотв. *топологией*) *равномерной сходимости*; говорят, что фильтр Φ, сходящийся к v в этой топологии, *равномерно сходится* к v.

в) Пусть E — топологическое пространство; примем за $\mathfrak{S}$ множество всех компактных множеств из E; соответствующая равномерная структура (соотв. топология) называется *равномерной структурой* (соотв. *топологией*) *компактной сходимости*. Если E компактно (соотв. дискретно), эта равномерная структура совпадает с равномерной структурой равномерной (соотв. простой) сходимости.

Если $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ — множества подмножеств множества E такие, что $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2$, то равномерная структура равномерной сходимости на множествах из $\mathfrak{S}_1$ мажорируется равномерной структурой равномерной сходимости на множествах из $\mathfrak{S}_2$.

3. Пусть $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(E, F)$ (или просто $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}$) — равномерное пространство, получаемое наделением $\mathscr{F}(E, F)$ равномерной структурой

равномерной сходимости на множествах из $\mathfrak{S}$. Для того чтобы $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}$ было отделимо, необходимо и достаточно, чтобы F было отделимо и каждый элемент из E принадлежал хотя бы одному множеству из $\mathfrak{S}$. Тогда подпространство F' пространства $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(E, F)$, образованное всеми постоянными отображениями E в F, замкнуто и изоморфно F. Если пространство $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}$ отделимо, то для сходимости фильтра Φ в нем необходимо и достаточно, чтобы Φ был фильтром Коши и просто сходился; для того чтобы $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}$ было полным, необходимо и достаточно, чтобы F было полным; всякое множество $H \subset \mathscr{F}_{\mathfrak{S}}$, полное в равномерной структуре простой сходимости, есть полное подпространство пространства $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}$.

4. Пусть $(f_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство отклонений, определяющее равномерную структуру пространства F. Для каждого $\iota \in I$, каждого $A \in \mathfrak{S}$ и каждой пары (u, v) отображений E в F положим $g_{\iota, A}(u, v) = \sup_{x \in A} f_\iota(u(x), v(x))$; функции $g_{\iota, A}$ являются отклонениями на $\mathscr{F}(E, F)$, определяющими равномерную структуру равномерной сходимости на множествах из $\mathfrak{S}$.

В частности, если F — метрическое пространство, структура равномерной сходимости в $\mathscr{F}(E, F)$ определяется единственным отклонением $\delta(u, v) = \sup_{x \in E} d(u(x), v(x))$ (где d — расстояние пространства F) и потому метризуема. Пусть $\mathscr{B}(E, F)$ — подпространство пространства $\mathscr{F}(E, F)$, образованное всеми ограниченными отображениями $u: E \to F$ (т. е. для которых $u(E)$ — ограниченное множество в F); $\mathscr{B}(E, F)$ открыто-замкнуто в $\mathscr{F}(E, F)$, и сужение отклонения $\delta(u, v)$ на $\mathscr{B} \times \mathscr{B}$ есть расстояние в $\mathscr{B}$; для того чтобы $\mathscr{B}(E, F)$ было полным, необходимо и достаточно, чтобы F было полным.

Если F — нормированное пространство над нормированным телом K, то $\mathscr{B}(E, F)$ — векторное пространство над K, и $\| u \| = \delta(0, u)$ есть норма в $\mathscr{B}(E, F)$. Ряд с общим членом u_n называется *нормально сходящимся*, если $\sum_{n=0}^{\infty} \| u_n \| < +\infty$; когда F полно, такой ряд равномерно сходится на E.

Если F — нормированная алгебра над нормированным полем K, то $\mathscr{B}(E, F)$ — алгебра над K и $\|uv\| \leqslant \|u\| \|v\|$, так что $\mathscr{B}(E, F)$ — нормированная алгебра над K.

5. Пусть E — топологическое пространство, F — равномерное пространство и $\mathscr{C}(E, F)$ — подпространство пространства $\mathscr{F}(E, F)$, образованное всеми непрерывными отображениями E в F. Если $\mathfrak{S}$ — такое множество подмножеств множества E, что всякая точка $x \in E$ является внутренней хотя бы для одного множества из $\mathfrak{S}$, то $\mathscr{C}(E, F)$ замкнуто в $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(E, F)$; другими словами, всякая функция, являющаяся равномерным пределом непрерывных функций на каждом множестве из $\mathfrak{S}$, непрерывна (гл. X, § 1, теорема 2). Для того чтобы подпространство $\mathscr{C}(E, F)$ пространства $\mathscr{F}_{\mathfrak{S}}(E, F)$ было отделимо и полно, необходимо и достаточно, чтобы F было отделимо и полно.

Предыдущее условие на $\mathfrak{S}$ выполнено, в частности, в следующих двух случаях: а) $\mathfrak{S}$ сводится к одному E (равномерная структура равномерной сходимости); б) E локально компактно и $\mathfrak{S}$ множество всех его компактных подмножеств (равномерная структура компактной сходимости). Напротив, оно не выполняется, если $\mathfrak{S}$ — множество всех конечных множеств из E и E не дискретно (равномерная структура простой сходимости), ибо простой предел непрерывных функций не обязательно непрерывен.

6. Пусть A — всюду плотное подмножество топологического пространства E. В множестве $\mathscr{C}(E, F)$ равномерные структуры равномерной сходимости на E и равномерной сходимости на A совпадают. Отсюда вытекает, что если $\mathfrak{S}$ — какое-либо множество подмножеств из E, а $\mathfrak{S}'$ образовано их замыканиями, то равномерная структура равномерной сходимости на множествах из $\mathfrak{S}$ и равномерная структура равномерной сходимости на множествах из $\mathfrak{S}'$ индуцируют в $\mathscr{C}(E, F)$ одну и ту же равномерную структуру.

7. Если наделить множество $\mathscr{C}(E, F)$ топологией равномерной сходимости, то отображение $(u, x) \mapsto u(x)$ произведения $\mathscr{C}(E, F) \times E$ в F непрерывно.

Пусть E — локально компактное пространство, F — отделимое равномерное пространство и H — непустое множество в $\mathscr{C}(E, F)$. Для того чтобы топология $\mathscr{T}$ в H была такова, что

отображение $(u, x) \mapsto u(x)$ произведения $H \times E$ в F непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{T}$ мажорировала топологию, индуцируемую в H топологией компактной сходимости (гл. X, § 3, следствие 1 теоремы 3).

Если E локально компактно, то топология компактной сходимости в $\mathscr{C}(E, F)$ зависит лишь от топологии пространства F, а не от его равномерной структуры. Этот результат можно уточнить следующим образом: пусть $\Omega(K, U)$ для каждой пары (K, U), образованной компактным множеством K из E и открытым множеством U из F, означает множество всех непрерывных отображений E в F, для которых $u(K) \subset U$; тогда множества $\Omega(K, U)$ порождают топологию компактной сходимости в $\mathscr{C}(E, F)$ (гл. X, § 3, теорема 2).

Если E — локально компактное пространство, а F — отделимое (не обязательно равномеризуемое) топологическое пространство, то топологию, порождаемую в $\mathscr{C}(E, F)$ определенными выше множествами $\Omega(K, U)$, также называют *топологией компактной сходимости*.

8. Пусть E — топологическое пространство, E' — локально компактное пространство, F — отделимое топологическое пространство и f — отображение произведения $E \times E'$ в F. Пусть f_x для каждого $x \in E$ означает отображение $y \mapsto f(x, y)$ пространства E' в F. Для непрерывности f на $E \times E'$ необходимо и достаточно, чтобы отображение f_x было непрерывно на E' при всех $x \in E$, а отображение $x \mapsto f_x$ пространства E в $\mathscr{C}(E', F)$ было непрерывно при наделении $\mathscr{C}(E', F)$ топологией компактной сходимости (гл. X, § 3, теорема 3).

Предположим, кроме того, что и E локально компактно, и обозначим через $\tilde{f}$ отображение $x \mapsto f_x$ пространства E в $\mathscr{C}(E', F)$; тогда при наделении множеств $\mathscr{C}(E', F)$, $\mathscr{C}(E \times E', F)$ и $\mathscr{C}(E, \mathscr{C}(E', F))$ топологией (соотв. равномерной структурой, если F — равномерное пространство) компактной сходимости отображение $f \mapsto \tilde{f}$ является изоморфизмом $\mathscr{C}(E \times E', F)$ на $\mathscr{C}(E, \mathscr{C}(E', F))$.

Если при тех же предположениях $\mathscr{C}(E, E')$, $\mathscr{C}(E', F)$ и $\mathscr{C}(E, F)$ наделены топологией компактной сходимости, то отображение $(u, v) \mapsto v \circ u$ произведения $\mathscr{C}(E, E') \times \mathscr{C}(E', F)$ в $\mathscr{C}(E, F)$ непрерывно.

9. Пусть E — топологическое пространство и F — равномерное пространство. Множество $H \subset \mathscr{F}(E, F)$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0 \in E$, если для каждого окружения V для F существует окрестность U точки x_0 такая, что $(u(x_0), u(x)) \in V$, каковы бы ни были $x \in U$ и $u \in H$. H называется *равностепенно непрерывным* множеством, если оно равностепенно непрерывно в каждой точке из E. Ясно, что если H равностепенно непрерывно в точке x_0 (соотв. равностепенно непрерывно), то всякая функция из H непрерывна в точке x_0 (соотв. непрерывна на E).

Пусть E и F — равномерные пространства; множество $H \subset \mathscr{C}(E, F)$ называется *равномерно равностепенно непрерывным*, если для каждого окружения V равномерной структуры в F существует окружение W равномерной структуры в E такое, что $(x, y) \in W$ влечет $(u(x), u(y)) \in V$ для всех $u \in H$. В этом случае функции из H равномерно непрерывны на E. Очевидно, всякое равномерно равностепенно непрерывное множество равностепенно непрерывно; но обратное неверно (см. n° 16).

10. Пусть E и F — метрические пространства, d — расстояние на E, d' — расстояние на F, k и α — числа >0. Множество всех отображений $u: E \to F$, для которых $d'(u(x), u(y)) \leqslant k(d(x, y))^{\alpha}$, равномерно равностепенно непрерывно. В частности, множество всех изометрических отображений E в F равномерно равностепенно непрерывно. Если H — некоторое множество числовых функций, определенных и дифференцируемых на интервале $I \subset \mathbf{R}$ и таких, что $|u'(x)| \leqslant k$ для всех $u \in H$ и $x \in I$, то H равномерно равностепенно непрерывно.

Пусть G — топологическая группа, F — равномерное пространство, f — равномерно непрерывное отображение G, наделенного левой равномерной структурой, в F и f_a для каждого $a \in G$ — отображение $x \mapsto f(ax)$ группы G в F. Тогда множество всех отображений f_a равномерно равностепенно непрерывно.

Далее E будет обозначать топологическое пространство или равномерное пространство, смотря по тому, идет ли речь о равностепенно непрерывных или равномерно равностепенно непрерывных множествах.

°11. Пусть F — нормированное векторное пространство над нормированным телом K, H — множество в $\mathscr{F}(E, F)$, равностепенно непрерывное в точке x_0 (соотв. равномерно равностепенно

непрерывное), и k — произвольное число >0; множество H_k всевозможных линейных комбинаций $\sum_i c_i u_i$ функций $u_i \in H$, у которых $\sum_i |c_i| \leqslant k$, равностепенно непрерывно в точке x_0 (соотв. равномерно равностепенно непрерывно).$_\circ$

Пусть H — множество конечных числовых функций на E, равностепенно непрерывное в точке x_0 (соотв. равномерно равностепенно непрерывное). Множество всех верхних и нижних огибающих его конечных подмножеств равностепенно непрерывно в точке x_0 (соотв. равномерно равностепенно непрерывно).

12. Пусть H — множество в $\mathscr{F}(E, F)$, равностепенно непрерывное в точке x_0 (соотв. равномерно равностепенно непрерывное). Его замыкание $\bar{H}$ в пространстве $\mathscr{F}(E, F)$, наделенном топологией простой сходимости, равностепенно непрерывно в точке x_0 (соотв. равномерно равностепенно непрерывно).

°Пусть H — равностепенно непрерывное множество конечных числовых функций на E (соотв. отображений E в C) относительно аддитивной равномерной структуры в $\mathbf{R}$ (соотв. C). Если v — отображение E в $\bar{\mathbf{R}}$ (соотв. $\bar{\mathrm{C}}$), принадлежащее замыканию H в топологии простой сходимости, то v непрерывно на E, а множества $\overset{-1}{v}(+\infty)$ и $\overset{-1}{v}(-\infty)$ (соотв. $\overset{-1}{v}(\infty)$) открыто-замкнуты. В частности, если E связно, то $v(x)$ либо конечно для всех $x \in E$, либо постоянно на E и равно $+\infty$ или $-\infty$ (соотв. ∞).

Предыдущее предложение применимо, в частности, к верхней и нижней огибающим множества H, когда H состоит из вещественных функций.$_\circ$

13. Пусть H — множество в $\mathscr{F}(E, F)$, равностепенно непрерывное в точке $x_0 \in E$. При наделении H топологией простой сходимости, отображение $(u, x) \mapsto u(x)$ произведения $H \times E$ в F непрерывно в точке (u_0, x_0) для каждого $u_0 \in H$.

Для того чтобы множество $H \subset \mathscr{C}(E, F)$ было равномерно равностепенно непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы отображение $(u, x) \mapsto u(x)$ произведения $H \times E$ в F было равномерно непрерывно при наделении H равномерной структурой равномерной сходимости.

14. Пусть E — топологическое (соотв. равномерное) пространство, F и G — равномерные пространства и H — равностепенно

непрерывное (соотв. равномерно равностепенно непрерывное) множество в $\mathscr{C}(F, G)$. При наделении H, $\mathscr{C}(E, F)$ и $\mathscr{C}(E, G)$ топологией простой сходимости (соотв. равномерной структурой равномерной сходимости) отображение $(u, v) \mapsto u \circ v$ произведения $H \times \mathscr{C}(E, F)$ в $\mathscr{C}(E, G)$ непрерывно (соотв. равномерно непрерывно).

Пусть E — равномерное пространство и H — равностепенно непрерывное (соотв. равномерно равностепенно непрерывное) множество гомеоморфизмов E на себя. При наделении H и H^{-1} топологией простой сходимости (соотв. равномерной структурой равномерной сходимости) отображение $u \mapsto u^{-1}$ пространства H^{-1} на H непрерывно (соотв. равномерно непрерывно).

Пусть E — равномерное пространство и H — равностепенно непрерывная (соотв. равномерно равностепенно непрерывная) группа гомеоморфизмов E на себя. Топология простой (соотв. равномерной) сходимости согласуется со структурой группы H (гл. X, § 3, следствие предложения 10).

15. Пусть H — равностепенно непрерывное множество в $\mathscr{C}(E, F)$ и A — всюду плотное множество в E. В множестве H равномерная структура простой сходимости на A и равномерная структура простой сходимости на E совпадают (гл. X, § 2, теорема 1).

16. Пусть E — компактное пространство и F — равномерное пространство. Всякое равностепенно непрерывное множество H в $\mathscr{C}(E, F)$ равномерно равностепенно непрерывно (гл. X, § 2, следствие 2 предложения 1). При этом в H равномерные структуры простой сходимости и равномерной сходимости совпадают (гл. X, § 2, теорема 1). Поэтому всякий фильтр в H, просто сходящийся к u_0, равномерно сходится к u_0. Замыкание множества H в $\mathscr{C}(E, F)$, наделенном топологией равномерной сходимости, совпадает с замыканием H в $\mathscr{F}(E, F)$, наделенном топологией простой сходимости.

17. Пусть E — топологическое пространство, F — равномерное пространство и H — равностепенно непрерывное множество в $\mathscr{C}(E, F)$. В H равномерные структуры простой сходимости и компактной сходимости совпадают. Если при этом E локально компактно, то замыкание множества H в $\mathscr{C}(E, F)$, наделенном топологией компактной сходимости, совпадает с замыканием H в $\mathscr{F}(E, F)$, наделенном топологией простой сходимости.

18. Пусть E — локально компактное пространство, F — отделимое равномерное пространство и H — некоторое множество непрерывных отображений E в F. Если $\mathscr{T}$ — такая топология в H, что H, наделенное этой топологией, компактно, а отображение $(u, x) \mapsto u(x)$ произведения $H \times E$ в F непрерывно, то $\mathscr{T}$ совпадает с топологией компактной сходимости.

Пусть E — локально компактное пространство, F — отделимое равномерное пространство и H — некоторое множество непрерывных отображений E в F. Для того чтобы H было относительно компактно в пространстве $\mathscr{C}(E, F)$, наделенном топологией компактной сходимости, необходимо и достаточно, чтобы H было равностепенно непрерывно и для каждого $x \in E$ множество $H(x)$ (всех $u(x)$, где u пробегает H) было относительно компактно в F (*теорема Асколи*) (гл. X, § 2, следствие 3 теоремы 2). Если эти условия выполнены, то для каждого относительно компактного множества A из E множество $H(A) = \bigcup_{x \in A} H(x)$ относительно компактно в F.

В случае, когда F полно, второе условие предыдущей теоремы может быть заменено следующим: достаточно, чтобы $H(x)$ было относительно компактно в F для каждой точки x какого-либо всюду плотного множества $A \subset E$.

°Кроме того, если F есть пространство $\mathbf{R}^n$, а E связно, то достаточно ограниченности $H(x_0)$ в F для какой-нибудь точки $x_0 \in E$, чтобы множество $H(x)$ было ограниченно в F для каждой точки $x \in E$ (разумеется, в предположении, что H равностепенно непрерывно).°

19. Пусть G — группа гомеоморфизмов локально компактного пространства E на себя. Предположим, что в множестве $\mathscr{C}(E, E)$, наделенном топологией компактной сходимости, существует такая окрестность V тождественного отображения e, что $H = V \cap G$ симметрично в G и относительно компактно в $\mathscr{C}(E, E)$. При этих условиях:

а) Множество $\hat{G}$ пределов в $\mathscr{C}(E, E)$ тех фильтров Φ в G, для которых Φ и Φ^{-1} сходятся в $\mathscr{C}(E, E)$, есть группа гомеоморфизмов пространства E, содержащая (компактное) замыкание $\overline{H}$ множества H в $\mathscr{C}(E, E)$, и $\overline{H}$ есть окрестность e в $\hat{G}$;

б) Топология компактной сходимости в $\hat{G}$ согласуется со структурой группы; наделенная этой топологией, $\hat{G}$ является локально компактной группой, а G — всюду плотная ее подгруппа (гл. X, § 3, теорема 4).

Заметим, что $\hat{G}$ содержится в замыкании $\overline{G}$ группы G в пространстве $\mathscr{C}(E, E)$, но вообще не совпадает с ним; однако если $\overline{G}$ компактна, то $\hat{G} = \overline{G}$.

20. Пусть E — компактное пространство и H — некоторое множество непрерывных (и конечных) числовых функций, определенных на E. Говорят, что непрерывная числовая функция f на E *равномерно аппроксимируема* функциями из H, если f принадлежит замыканию множества H в пространстве $\mathscr{C}(E, \mathbf{R})$, наделенном топологией равномерной сходимости; равномерная аппроксимируемость каждой функции $f \in \mathscr{C}(E, \mathbf{R})$ функциями из H означает, что H всюду плотно в $\mathscr{C}(E, \mathbf{R})$. Если это имеет место, то для каждого нормированного пространства F над полем R множество всех линейных комбинаций $\sum_i a_i u_i$ функций из H с коэффициентами из F всюду плотно в пространстве $\mathscr{C}(E, F)$, наделенном топологией равномерной сходимости.

21. Пусть E — компактное пространство и H — множество непрерывных числовых функций на E, фильтрующееся по отношению $\leqslant$ (соотв. $\geqslant$). Если верхняя (соотв. нижняя) огибающая f множества H конечна и непрерывна на E, то f равномерно аппроксимируема функциями из H; другими словами, фильтр сечений множества H равномерно сходится к f (*теорема Дини*) (гл. X, § 4, теорема 1).

В частности, если верхняя (соотв. нижняя) огибающая f возрастающей (соотв. убывающей) последовательности (u_n) непрерывных числовых функций на компактном пространстве E конечна и непрерывна, то (u_n) равномерно сходится к f.

22. Говорят, что множество H отображений множества E в множество F *отделяет* элементы множества $A \subset E$ (или является *отделяющим множеством* для элементов из A), если для каждых двух различных элементов x, y из A существует такое $f \in H$, что $f(x) \neq f(y)$. Например, если E — вполне регулярное простран-

ство, то множество всех непрерывных отображений E в $[0, 1]$ отделяет точки пространства E.

Пусть E — компактное пространство и H — такое векторное подпространство пространства $\mathscr{C}(E, \mathbf{R})$, что: 1° все постоянные функции принадлежат H; 2° $u \in H$ влечет $|u| \in H$; 3° H отделяет точки пространства E. При этих условиях всякая непрерывная числовая функция на E равномерно аппроксимируема функциями из H (гл. X, § 4, теорема 2).

23. Пусть H — некоторое множество числовых функций, определенных на множестве E; числовая функция, определенная на E, называется *полиномом* (соотв. *полиномом без постоянного члена*) *относительно функций из* H, если она имеет вид $x \mapsto g(f_1(x), \ldots, f_n(x))$, где все f_i принадлежат H, а g — полином (соотв. полином без постоянного члена) с вещественными коэффициентами от n неизвестных (где n произвольно).

Пусть H — некоторое множество непрерывных числовых функций на компактном пространстве E, отделяющее его точки. Тогда всякая непрерывная числовая функция на E равномерно аппроксимируема полиномами относительно функций из H (*теорема Вейерштрасса — Стоуна*) (гл. X, § 4, теорема 3). Другими словами, всякая подалгебра в $\mathscr{C}(E, \mathbf{R})$, содержащая постоянные функции и отделяющая точки из E, всюду плотна в $\mathscr{C}(E, \mathbf{R})$.

В частности, пусть $(K_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство компактных интервалов из R, $K = \prod_{\iota \in I} K_\iota$ — произведение этих интервалов и E — его компактное подпространство. Всякая непрерывная числовая функция на E равномерно аппроксимируема полиномами относительно координат $x_\iota = \mathrm{pr}_\iota x$.

24. Пусть $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство компактных пространств и $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ — его произведение. Всякая непрерывная числовая функция на E равномерно аппроксимируема суммами конечного числа функций вида $(x_\iota) \mapsto \prod_{\alpha \in J} u_\alpha(x_\alpha)$, где J — (произвольное) конечное множество индексов из I, а u_α для каждого $\alpha \in J$ — непрерывная числовая функция на E_α (гл. X, § 4, теорема 4).

25. Пусть E — компактное пространство, A — замкнутое множество в E, и H — некоторое множество непрерывных числовых функций на E, отделяющее точки множества $\complement A$ и такое, что A совпадает с множеством тех точек из E, в которых обращаются в нуль все функции из H. При этих условиях всякая непрерывная числовая функция на E, равная нулю на A, равномерно аппроксимируема полиномами без постоянного члена относительно функций из H.

26. Пусть P — множество всех периодических непрерывных отображений $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{C}$, группа периодов которых содержит $\mathbf{Z}^m$. Всякая функция из P равномерно аппроксимируема на $\mathbf{R}^m$ *тригонометрическими полиномами от m переменных*, т. е. линейными комбинациями с комплексными коэффициентами функций вида

$$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto e(h_1x_1 + h_2x_2 + \ldots + h_mx_m),$$

где h_l — целые рациональные числа (напомним, что $e(x) = e^{2\pi ix}$).

27. Пусть E — компактное пространство. Для того чтобы пространство $\mathscr{C}(E, \mathbf{R})$, наделенное топологией равномерной сходимости (в которой оно метризуемо), было пространством счетного типа, необходимо и достаточно, чтобы E было метризуемо.

Пусть E — локально компактное пространство, счетное в бесконечности. Для того чтобы пространство $\mathscr{C}(E, \mathbf{R})$, наделенное топологией компактной сходимости (в которой оно метризуемо), было пространством счетного типа, необходимо и достаточно, чтобы E было метризуемо.

СЛОВАРЬ *)

Введение

Искусство рассуждать сводится к хорошо разработанному языку... Слово должно порождать идею; идея должна выражать дело; это три оттиска одной и той же печати; и так как идеи сохраняются и передаются словами, то нельзя ни совершенствовать язык, не совершенствуя науку, ни — науку, не совершенствуя язык, и сколь бы достоверны ни были факты, и как бы правильны ни были порожденные ими идеи, они все же вызвали бы ложные представления, не обладай мы точными выражениями для их передачи...

Мы старались сохранить за всеми предметами названия, которые они носят в обиходе; мы позволяли себе изменять их только в двух случаях: во-первых, для предметов, недавно открытых и вовсе не получивших еще названия или по крайней мере приобретших его лишь недавно, так что их название еще ново и не санкционировано общим признанием; во-вторых, когда названия, принятые в древности или в настоящее время, порождают, как нам кажется, очевидным образом, ложные представления, могущие привести к смешению выражаемых ими предметов с другими, обладающими иными или даже противоположными свойствами... Итак, мы старались выражать новыми названиями наиболее общие и характерные свойства предмета и предпочли не обременять память начинающих, которая с трудом удерживает новое слово, если оно совершенно лишено смысла, и приучать их с самого начала не допускать никаких слов, не связывая их с каким-либо понятием.

Разумеется, невозможно выполнить эти различные намерения, не задев в какой-то мере сложившихся привычек и не приняв наименований, которые на первый взгляд покажутся грубыми и варварскими, но мы подметили, что ухо быстро привыкает к новым словам, особенно когда они связаны с общей системой и обоснованы ...

Когда мы опубликовали наш «Essai de Nomenclature chimique», *нас упрекали в переделке языка, на котором говорили наши учителя, который они*

---

*) Воспроизведен из первого французского издания главы X, вышедшего в 1949 г. Некоторые термины устарели и представляют лишь исторический интерес. *Ред.*

прославили и передали нам; но при этом упускали из виду, что сами Берман и Маккер добивались такой реформы. Ученый, профессор из Упсалы, М. Берман писал М. Деморво в последние годы своей жизни: «Не давайте пощады ни одному неподходящему наименованию; те, кто уже знает, всегда поймут; те, кто еще не знает, поймут позже».

A. L. Lavoisier
Traité élémentaire de Chimie, Discours préliminaire (Oeuvres, t. 1, Paris, 1864)

* * *

Жирными прописными буквами набраны термины, определенные в книге III настоящего трактата; каждый из них сопровождается ссылкой на главу, параграф и пункт, где он введен. Остальные слова представляют собой либо перевод терминов, определенных в этой книге, на язык другой терминологии (французской или иностранной), либо термины, означающие понятия, тесно связанные с изучаемыми в книге, но не рассматриваемые в основном тексте; в этом последнем случае понятие тут же определяется с помощью терминов, введенных в тексте книги. Немецкие и английские термины, весьма близкие по написанию к французским, имеющим тот же смысл, опущены (например, слово «*continuous*» или «*kompakt*»). Термины, стоящие во главе абзаца и фигурирующие затем в различных выражениях, не повторяются каждый раз, а заменяются знаком тире. Наименования, состоящие из нескольких слов, приводятся вообще лишь на первую букву одного из них (например, «*espace localement compact*» на букву L, но не на буквы E и C). Слово, не сопровождаемое никакой ссылкой, имеет один и тот же смысл во всех основных сочинениях, написанных на языке, к которому оно принадлежит; если это не так, то отмечается автор (или авторы), у которого слово имеет указанный смысл. Для наиболее часто встречающихся ссылок приняты следующие сокращения:

(A—H) P. Alexandroff, H. Hopf, Topologie I, Berlin (Springer), 1935.
(C) C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, 2-e изд., Leipzig — Berlin (Teubner), 1927.
(F) M. Fréchet, Les espaces abstraits, Paris (Gauthier-Villars), 1928.
(H) F. Hausdorff, Mengenlehre, Berlin (de Gruyter), 1927. (Русский перевод: Ф. Хаусдорф, Теория множеств, ГТТИ, 1934).
(Ho) E. W. Hobson, The theory of functions of a real variable, t. I, 3e éd., Cambridge, 1927.
(K) C. Kuratowski, Topologie, Warszawa, 1933. (Русский перевод: К. Куратовский, Топология, т. 1, «Мир», М., 1966, т. 2, «Мир», М., 1969).
(L) S. Lefschetz, Algebraic Topology, Am. Math. Soc. Coll., vol. XXVII, New York, 1942. (Русский перевод: С. Лефшец, Алгебраическая топология, М., ИЛ, 1949).
(N) M. H. A. Newman, Topology of plane sets, Cambridge, 1939.

(P) L. Pontrjagin, Topological groups, Princeton, 1939. (Русский оригинал: Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1954; изд. 3-е, «Наука», 1973.

(W) G. T. Whyburn, Analytic Topology, Am. Math. Soc. Coll., vol. XXVIII, New York, 1942.

A

Abgeschlossene Abbildung (замкнутое отображение; см. **Fermée (application)**; — **Hülle** einer Menge (замыкание множества); — **Menge** (замкнутое множество).

Abgeschlossener Raum (absolut —, II —) (A – H): отделимое пространство E такое, что для любого его гомеоморфизма f в отделимое пространство F множество $f(E)$ замкнуто в F; — (**n-**) (A—H): нормальное пространство E такое, что для любого его гомеоморфизма f в нормальное пространство F множество $f(E)$ замкнуто в F; — (**r-**) (A—H): регулярное пространство E такое, что для любого его гомеоморфизма f в регулярное пространство F множество $f(E)$ замкнуто в F.

Ableitung einer Menge (производное множество, см. **Dérivé (ensemble)**).

ABSOLUMENT CONVERGENT (PRODUIT INFINI) (абсолютно сходящееся бесконечное произведение) вещественных чисел: IV, 7, 6; — комплексных чисел: VIII, 3, 3.

ABSOLUMENT CONVERGENTE (SÉRIE) (абсолютно сходящийся ряд) вещественных чисел: IV, 7, 6; — точек из $\mathbf{R}^n$: VII, 3, 2; — в нормированном пространстве: IX, 3, 6.

ABSOLUMENT SOMMABLE (FAMILLE) (абсолютно суммируемое семейство) в нормированном пространстве: IX, 3, 6.

Abweichung zweier Mengen A, B in einem metrischen Raum (отклонение множеств A, B в метрическом пространстве) (A — H): бо́льшее из чисел $\sup_{x\in A} d(x, B)$ и $\sup_{y\in B} d(y, A)$.

Abzählbarkeitsaxiome (аксиомы счетности; см. **Dénombrabilité (axiomes de)**).

Accessible (espace) (достижимое пространство) (F): топологическое пространство, в котором всякое одноточечное множество замкнуто. Нем.: T_1-Raum (T_1-пространство). Англ.: T_1-space.

Accumulation (point d') (предельная точка) множества: x есть предельная точка множества A, если любая ее окрестность содержит точку из A, отличную от x; иначе говоря, если x — точка прикосновения для $A \cap \mathbf{C}\{x\}$ (см. **ADHÉRENCE**). Нем.: Häufungspunkt einer Menge. Англ.: limit-point of a set (N, W).

ACHEVÉE (DROITE NUMÉRIQUE) (расширенная числовая прямая); IV, 4, 2.

Acute angle: angle aigu (острый угол).

ADHÉRENCE d'un ensemble (замыкание множества): I, 1, 6. В прежней терминологии: fermeture d'un ensemble. Нем.: Abgeschlossene Hülle einer Menge. Англ.: closure of a set. ‖ Понятие замыкания множества довольно поздно сделалось одним из основных понятий топологии. До Хаусдорфа в качестве первоначальных рассматривались по Кантору понятия пре-

дельной точки и производного множества. Во французском языке слово «adhérence» предпочтительнее старого термина «fermeture», поскольку позволяет использовать соответствующее прилагательное «adhérent» для точки, принадлежащей замыканию множества.

ADHÉRENCE (VALEUR D') (предельная точка) функции по фильтру: I, 7, 3; — последовательности: I, 7, 3. В прежней терминологии (для последовательностей в пространстве, всякая точка которого обладает счетной фундаментальной системой окрестностей): предел подпоследовательности данной последовательности.

ADHÉRENT (POINT) (точка прикосновения) множества: I, 1, 6;— базиса фильтра: I, 7, 2. Нем.: Berührungs punkt einer Menge (A—H). Англ.: point of closure (N).

AIGU (SECTEUR ANGULAIRE) (острый угловой сектор): VIII, 2, 5. Нем.: spitzer Winkel. Англ.: acute angle.

Allgemeine Metrik (A—H) (общая метрика): функция на $E \times E$ с конечными числовыми значениями $\geqslant 0$

Allgemein-metrisierbarer Raum (A—H): «Общее топологическое пространство» E в смысле (A—H) (см. **TOPOLOGIQUE (ESPACE)**), в котором существует «Общая метрика» (см. **Allgemeine Metrik**) f такая, что $\overline{X}$ для любого $X \subset E$ есть множество тех точек $y \in E$, для которых $\inf_{x \in X} f(x, y) = 0$.

ALTERNÉE (SÉRIE) (знакочередующийся ряд): IV, 7, 6.

AMPLITUDE (амплитуда) комплексного числа: VIII, 2, 2. В прежней терминологии: аргумент комплексного числа.

ANGLE (угол) между парой полупрямых: VIII, 2, 2; — между парой прямых: VIII, 2, 6. Нем.: Winkel. Англ.: angle.

APPROXIMATION UNIFORME (равномерная аппроксимация) непрерывной числовой функции непрерывными функциями из данного множества: X, 4, 1.

Argument (аргумент) комплексного числа (см. **AMPLITUDE**).

ASSOCIÉ (ANNEAU SÉPARÉ) (отделимое кольцо, ассоциированное с топологическим кольцом); III, 6, 4; — **(FILTRE ÉLÉMENTAIRE)** (элементарный фильтр, ассоциированный с последовательностью): I, 6, 8; — **(GROUPE SÉPARÉ)** (отделимая группа, ассоциированная с топологической группой): III, 2, 6; — **(SOUS-GROUPE)** (подгруппа, ассоциированная с подгруппой в $\mathbf{R}^n$): VII, 1, 3.

ASSOCIÉE (STRUCTURE UNIFORME SÉPARÉE) (отделимая равномерная структура, ассоциированная с равномерной структурой): II, 3, 8; — **(TOPOLOGIE)** (топология, ассоциированная с фильтром); I, 6, 5.

Äusserer Punkt einer Menge: точка, внешняя к множеству.

Automorphie (автоморфизм) топологического пространства (K): гомеоморфизм пространства на себя.

B

BAIRE (ESPACE DE) (бэровское пространство): IX, 5, 3. В прежней терминологии: пространство, в котором всякое непустое открытое множество есть множество второй категории.

Bairescher Raum (H) (пространство Бэра): метрическое пространство, образованное элементами $x = (x_n)$ произведения $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ счетно бесконечного семейства множеств, наделенное расстоянием $d(x, y)$, равным обратной величине наименьшего целого m, для которого $x_m \neq y_m$, если $x \neq y$, и нулю, если $x = y$.

BASE (базис) разложения вещественного числа: IV, 8, 2;— фильтра: I, 6, 3; (основание) системы логарифмов: V, 4, 1; (основание) системы измерения углов: VIII, 2, 3; (базис) топологии: I, 1, 3. Нем.: Basis. Англ.: basis, base.

Base at a point (L): фундаментальная система открытых окрестностей точки.

Base (closed) for a topological space (L): множество $\mathfrak{B}$ замкнутых множеств такое, что всякое замкнутое множество есть пересечение множеств из $\mathfrak{B}$.

Bedingt kompakte Menge (H): предкомпактное подпространство метрического пространства.

Begrenzung einer Menge: граница множества (см. **FRONTIÈRE**).

Berührungspunkt einer Menge (A—H): точка прикосновения множества.

Beschränkte Funktion: ограниченная числовая функция; — **Menge**: ограниченное множество (в метрическом пространстве); — **Metrik**: расстояние на множестве E такое, что соответствующее метрическое пространство ограничено.

Betrag (absoluter) einer Zahl: абсолютное значение вещественного числа; — **eines Vektors** (C): евклидова норма вектора в $\mathbf{R}^n$.

Betrag (H): числовая функция $x \mapsto |x|$, определенная на векторном пространстве E над полем R такая, что $|x| > 0$ для всех $x \neq 0$, $|0| = 0$, $|-x| = |x|$ и $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Bewerteter Körper: нормированное тело.

Bewertung: абсолютное значение (на теле).

Bicompact (espace): пространство, удовлетворяющее аксиоме (C) (см. **COMPACT**).

BICONTINUE (APPLICATION) (взаимно непрерывное отображение): I, 2, 1. Синоним: гомеоморфизм. Нем.: topologische Abbildung (A—H), beiderseits stetige Abbildung (H), doppeltstetige Abbildung (H), umkehrbarstetige Abbildung (H). Англ.: topological mapping (N), topological transformation (L, W).

BISSECTRICE (биссектриса) углового сектора: VIII, 2, 5. Нем.: Winkelhalbierende.

BORNÉ (ENSEMBLE) (ограниченное множество) в метрическом пространстве: IX 2, 2. Нем.: beschränkte Menge. Англ.: bounded set.

BORNÉ INFÉRIEURE (— SUPÉRIEURE) (нижняя (верхняя) грань) числовой функции: IV, 5, 9. Нем.: Untere Grenze (obere Grenze) einer Funktion. Англ.: greatest lower bound (least upper bound) of a function, сокращенно g.l.b. (l.u.b.); lower boundary (upper boundary) of a function (Ho). Нем. и англ.: infimum (supremum).

BORNÉ INFÉRIEUREMENT (ENSEMBLE DE NOMBRES RÉELS) (ограниченное снизу множество вещественных чисел): IV, 2, 3; — **SUPÉRIEURE-**

MENT (ENSEMBLE DE NOMBRES RÉELS) (ограниченное сверху множество вещественных чисел): IV, 2, 3. Нем.: nach unten (nach oben) beschränkte Menge. Англ.: bounded from below (from above), bounded on the left (on the right) (Ho).

BORNÉE (FONCTION NUMÉRIQUE) (ограниченная числовая функция); IV, 5, 1; — **INFÉRIEUREMENT (FONCTION NUMÉRIQUE)** (ограниченная снизу числовая функция); IV, 5, 1; — **SUPÉRIEUREMENT (FONCTION NUMÉRIQUE)** (ограниченная сверху числовая функция): IV, 5, 1. Нем.: beschränkte (nach unten beschränkte, nach oben beschränkte) Funktion. Англ.: bounded function.

BOULE EUCLIDIENNE FERMÉE (замкнутый евклидов шар) n-мерный: VI, 2, 3. Нем.: Vollkugel (A–H), abgeschlossene Kugel (H, C).

BOULE EUCLIDIENNE OUVERTE (открытый евклидов шар) n-мерный: VI, 2, 3. В прежней терминологии: внутренность n-мерной гиперсферы (или сферы). Нем.: offene Kugel, sphärische Umgebung in R^n. Англ.: spherical region (L), spherical neighbourhood in R^n (N).

BOULE FERMÉE (замкнутый шар) в метрическом пространстве: IX, 2, 2. Старая терминология: sphéroïde (F).

BOULE OUVERTE (открытый шар) в метрическом пространстве: IX, 2, 2. Нем.: sphärische Umgebung (A—H). Англ.: sphere, spheroid (L).

BOULE UNITÉ (единичный шар) в R^n: VI, 2, 3; — — в нормированном пространстве: IX, 3, 3.

Boundary of a set (L, W): граница множества (см. **FRONTIÈRE**).

Bounded function: ограниченная функция; — **set**: ограниченное множество.

C

CANTOR (ENSEMBLE TRIADIQUE DE) (канторово множество): IV, 2, 5. Нем.: Cantorsches Diskontinuum, Cantorsche Menge. Англ.: Cantor set.

Caractère dénombrable (espace à) (F): пространство, в котором каждая точка обладает счетной фундаментальной системой окрестностей.

CARRÉ FERMÉ (OUVERT) (замкнутый (открытый) квадрат): VI, 1, 1. Нем.: Quadrat (C) (открытый квадрат). Англ.: square.

Cartesian product of two spaces: произведение двух топологических пространств.

Cartésien (espace) à n dimensions (ou n-dimensionnel) (F): числовое n-мерное пространство.

Catégorie (ensemble de première): (множество I категории): тощее множество; — **(ensemble de seconde)** (множество II категории): не тощее множество.

CAUCHY (FILTER DE) (фильтр Коши): II, 3, 1. — **(SUITE DE)** (последовательность Коши): II, 3, 1. В прежней терминологии (для последовательностей в метрическом пространстве): фундаментальная последовательность, последовательность, сходящаяся в себе. Нем.: Cauchysche Folge (H), Fundamentalfolge. Англ.: Cauchy sequence, fundamental sequence.

Cell (n-) (L): пространство, гомеоморфное замкнутому шару B_n.

CENTRALE (PROJECTION) (центральная проекция): VI, 2, 3.

CENTRE (центр) евклидова шара (евклидовой сферы): VI, 2, 3; шара (сферы) в метрическом пространстве: IX, 2, 2. Нем.: Mittelpunkt. Англ.: centre. Амер.: center.

CERCLE (окружность): VI, 2, 3. В прежней терминологии: «circonférence» или «circonférence de cercle». Нем.: Kreis, Kreislinie, Kreisrand. Англ.: circle, circumference. || Слово «cercle» (и его эквиваленты «Kreis» и «circle») уже с очень давних пор употребляется двусмысленно, обозначая в зависимости от авторов (а иногда даже в различных местах одного и того же сочинения) то «окружность», то «открытый диск», то «замкнутый диск» без заметного преобладания какого-либо из этих смыслов; именно для того, чтобы избежать этой двусмысленности, в тексте книги введен новый термин «disque» («диск»).

CERCLE UNITÉ (единичная окружность): VI, 2, 3. Нем.: Einheitskreis. Англ.: unit circle.

Chain of sets (L): (цепь множеств): конечная последовательность $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ подмножеств топологического пространства такая, что $A_i \cap A_{i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ не пусты.

CHAÎNE (V-) (V-цепь): II, 4, 4. Нем.: ε-Kette. Англ.: ε-chain (N, W) (для метрических пространств).

Clairsemé (ensemble) (нигде не плотное в себе множество) (F, K): множество, любая непустая часть которого не плотна в себе (см. **Dense en soi (ensemble)**).

Closed set: замкнутое множество.

Closed transformation (L): замкнутое отображение (см. **Fermée (application)**).

Closure of a set: замыкание множества.

COMMUTATIVEMENT CONVERGENTE (SÉRIE) (коммутативно сходящийся ряд): III, 5, 7.

COMPACT (ENSEMBLE) (компактное множество): I, 9, 3;—**(ESPACE)** (— пространство): I, 9, 1. В прежней терминологии: бикомпактное хаусдорфово пространство; хаусдорфово пространство, совершенно компактное в себе (F). || До 1937 г. под «компактным пространством», или «пространством, компактным в себе» (F), понимали пространство E, в котором всякое бесконечное множество обладает хотя бы одной предельной точкой (или, что сводится к тому же, в котором всякая последовательность имеет хотя бы одну предельную точку), а под «компактным множеством» в пространстве E — его подмножество, любая бесконечная часть которого обладает хотя бы одной предельной точкой в E. Если ограничиться метризуемыми пространствами, то пространства, компактные в смысле Фреше, совпадают с компактными пространствами, определенными в главе I. В общем случае всякое пространство, компактное в смысле текста настоящей книги, компактно также и в смысле Фреше, пространства же, компактные в смысле Фреше, но не компактные в смысле текста книги, имеют патологический характер и не встречаются в приложениях топологии. Заметим, что пространство, компактное в смысле (L) (или бикомпактное простран-

ство (A—H)), есть пространство, удовлетворяющее аксиоме (C), но *не обязательно отделимое.*

Compactum (компакт) (L): метризуемое компактное пространство.

COMPARABLES (STRUCTURES UNIFORMES) (сравнимые равномерные структуры): II, 2, 2; — **(TOPOLOGIES)** (— топологии): I, 2, 2.

COMPATIBLE (DISTANCE) (расстояние, согласующееся) с равномерной структурой: IX, 2, 4; — с топологией: IX, 2, 5; — **(NORME)** (норма, согласующаяся) со структурой алгебры: IX, 3, 7; — **(STRUCTURE UNIFORME)** (равномерная структура, согласующаяся) с топологией: II, 4, 1.

COMPATIBLES (STRUCTURE D'ANNEAU ET TOPOLOGIE) (согласующиеся структура кольца и топология): III, 6, 1; — **(STRUCTURE DE CORPS ET TOPOLOGIE)** (— структура тела и топология): III, 6, 7; — **(STRUCTURE DE GROUPE ET TOPOLOGIE)** (— структура группы и топология): III, 1, 1.

COMPLET (ANNEAU) (полное кольцо): III, 6, 5; — **(ESPACE UNIFORME)** (— равномерное пространство): II, 3, 3; — **(GROUPE)** (полная группа): III, 3, 3. Нем.: vollständig. Англ.: complete. || Понятие полного пространства относится к заданной равномерной структуре, а не топологии пространства. Отметим в связи с этим, что некоторые авторы называют «полным пространством» метризуемое топологическое пространство E, на котором существует расстояние, согласующееся с его топологией и такое, что E является относительно него полным метрическим пространством. В некоторых работах неметризуемое равномерное пространство называют полным, если в нем сходится всякая *последовательность Коши.*

COMPLÉTÉ (пополнение) отделимого топологического кольца: III, 6, 5; — отделимой топологической группы: III, 3, 4; — отделимого равномерного пространства: II, 3, 7. Нем.: vollständige Hülle. Англ.: completion.

Complètement normal (espace) (вполне нормальное пространство): отделимое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме Титце (см. **Séparation (axiomes de)**). Нем.: T_5-Raum (A—H), vollständig normaler Raum.

COMPLÉTEMENT RÉGULIER (ESPACE) (вполне регулярное пространство): IX, 1, 5. Нем.: vollständig regulärer Raum. Англ.: completely regular space, Tychonoff space (L).

COMPLÉTION (пополнение) равномерного пространства: II, 3, 3. Нем.: Vervollständigung eines Raumes. || Заметим, что по английски слово «пополнение» означает не операцию, состоящую в том, чтобы пополнить пространство, а ее *результат.*

COMPLEXE (NOMBRE) (комплексное число): VIII, 1,1.

Complexe fermé (plan) (замкнутая комплексная плоскость): старый термин, обозначающий пространство $\overline{\mathbf{C}}$ (гомеоморфное сфере S_2), получаемое компактификацией C путем присоединения бесконечно удаленной точки; — **ouvert (plan)** (открытая комплексная плоскость): старый термин, обозначающий тело C комплексных чисел, отождествляемое с $\mathbf{R}^2$.

Composant (компонента): связная компонента.

COMPOSANTE CONNEXE (связная компонента): I, 11, 5. Нем.: Komponente. Англ.: connected component, или component.

Condensation (point de) (точка конденсации множества): точкой конденсации множества A в пространстве E называется точка пространства E, каждая окрестность которой содержит несчетную часть множества A. Нем.: Verdichtungspunkt (H).

Conditionally compact set (условно компактное множество) (W): относительно компактное множество (в метризуемом пространстве).

CONJUGUÉ (сопряженное) комплексное число: VIII, 1, 1. Нем.: konjugiert. Англ.: conjugate.

Connected set: связное множество; — (ε —) (N): множество A в метрическом пространстве, любые две точки которого соединимы ε-цепью, состоящей из точек множества A.

Connected in a space E (points) (связанные в пространстве E точки)(N): пара точек пространства E, принадлежащих одной и той же его связной компоненте.

CONNEXE (ENSEMBLE) (связное множество): I, 11, 1; — (ESPACE) (связное пространство): I, 11, 1. Нем.: zusammenhängend. Англ.: connected.

Constituant (конституанта) точки: конституантой точки x пространства E называется объединение всех связных компактных множеств, содержащих x. Англ.: quasi-component (L).

CONTIGUS (INTERVALLES) (смежные интервалы) к замкнутому множеству в R: IV, 2, 5. Англ.: contiguous.

Continu (континуум): в настоящее время это слово означает метризуемое связное компактное пространство (W), иногда с условием, что оно не сводится к одной точке (A—H, N). Раньше под этим словом понимали вообще всякое связное замкнутое множество (H) или связное замкнутое множество, не сводящееся к одной точке (F). Нем.: Kontinuum. Англ.: continuum.

CONTINU (PUISSANCE DU) (мощность континуума): IV, 8, 6. Нем.: Mächtigkeit des Kontinuums. Англ.: power of the continuum.

CONTINUE (FONCTION) (непрерывная функция): I, 2, 1. Нем.: stetige Abbildung. Англ.: continuous function.

Continument convergente (suite) (непрерывно сходящаяся последовательность): локально равномерно сходящаяся последовательность функций (см. **Localement uniformément convergente (suite)**).

Continuum (generalized) (обобщенный континуум) (W): связное метризуемое локально компактное пространство.

Continuum of real numbers (континуум вещественных чисел) (Ho): числовая прямая.

Continuum (n-dimensional) (n-мерный континуум) (Ho): n-мерное числовое пространство.

CONVERGENT (FILTRE) (сходящийся фильтр): I, 7, 1; — **(PRODUIT INFINI)** (сходящееся бесконечное произведение): III, 5, 7; — **(PRODUIT INFINI DE NOMBRES RÉELS)** (— бесконечное произведение вещественн-

ных чисел): IV, 7, 6; — (**PRODUIT INFINI DANS UNE ALGÈBRE NORMÉE**) (бесконечное произведение в нормированной алгебре): IX, Прил., 3.

CONVERGENTE (BASE DE FILTRE) (сходящийся базис фильтра): I, 7, 1; — (**SÉRIE**) (— ряд): III, 5, 6; (**SÉRIE DE NOMBRES RÉELS**) (— ряд вещественных чисел): IV, 7, 6; — (**SUITE**) (сходящаяся последовательность): I, 7, 3.

CORPS DES NOMBRES COMPLEXES (поле комплексных чисел); VIII, 1, 1; — **DES NOMBRES RÉELS** (— вещественных чисел): IV, 3, 1; — **DES QUATERNIONS** (тело кватернионов): VIII, 1, 1.

Cosets (space of right) (пространство правых смежных классов) (P): однородное пространство, определенное подгруппой топологической группы.

COSINUS (косинус) угла: VIII, 2, 2; — числа: VIII, 2, 4.

COTANGENTE (котангенс) числа: VIII, 2, 4.

COTÉ (сторона) куба: VI, 1, 1. Нем.: Länge der Kanten eines Würfels.

Countability axioms: аксиомы счетности (см. **Dénombrabilité (axiomes de)**)

Countably compact space (счетно компактное пространство) (L): пространство, компактное в смысле Фреше (см. **COMPACT**).

Covering (closed): замкнутое покрытие; — (ε-) (L): покрытие метрического пространства множествами диаметра $\leqslant \varepsilon$; — (**open**): открытое покрытие.

CUBE (куб) n-мерный замкнутый (— открытый): VI, 1, 1; Нем.: n-dimensionaler Würfel; — бесконечномерный IX, 1, 5; англ.: Hilbert parallelotope (L) (гильбертов кирпич): счетное произведение компактных интервалов.

D

DÉCIMAL (DÉVELOPPEMENT) (десятичное разложение) вещественного числа: IV, 8, 5.

Decomposition space (факторпространство) (W).

DÉDUITE (TOPOLOGIE) (топология, порождаемая равномерной структурой): II, 1, 2.

DEGRÉ (градус (единица угла)): VIII, 2, 3.

DEMI-AXE RÉEL POSITIF (-NÉGATIF) (положительная (отрицательная) вещественная полуось): VIII, 1, 2.

DEMI-CERCLE FERMÉ (— OUVERT) (замкнутая (открытая) полуокружность): VI, 2, 4. Нем.: Halbkreis. Англ.: semicircle.

DEMI-DROITE FERMÉE (— OUVERTE) (замкнутая (открытая) полупрямая, луч): VI, 1, 4. Нем.: Halbgerade, Strahl. Англ.: Ray.

DEMI-ESPACES FERMÉS (— OUVERTS) (замкнутое (открытое) полупространство), определенное гиперплоскостью: VI, 1, 4. Нем.: Halbräume.

Dénombrabilité (axiomes de) (аксиомы счетности): первая аксиома счетности: всякая точка обладает счетной фундаментальной системой окрестностей. Вторая аксиома счетности: пространство обладает счетной базой. Нем.: Abzählbarkeitsaxiome. Англ.: countability axioms.

DENSE (ENSEMBLE) (плотное множество) относительно другого множества: I, 1, 6. Нем.: dichte Menge (zu einer Menge). Англ.: dense set. || Многие авторы определяют отношение «A плотно относительно B» только в слу-

чае, когда $A \subset B$, что является ограничением, неудобным для приложений. Слово «плотное» часто употребляется в смысле «всюду плотное» (A—H, K, L, N).

Dense en soi (ensemble) (множество, плотное в себе): множество, содержащееся в своем производном (см. **Dérivé (ensemble)**). Нем.: insichdichte Menge. Англ.: dense in itself.

DÉPLACEMENT EUCLIDIEN (евклидово движение): VI, 2, 2. Нем.: Bewegung.

Dérivé (ensemble) (производное множество) некоторого множества: производное множество подмножества A топологического пространства E есть множество всех предельных точек множества A (см. **Accumulation (point d')**); часто обозначается A'. Нем.: Ableitung einer Menge. Англ.: derived set.

Derived set: производное множество (см. **Dérivé (ensemble)**).

DÉVELOPPEMENT D'UN NOMBRE RÉEL (разложение вещественного числа) по базисной последовательности: IV, 8, 2.

DIAMÉTRAL (HYPERPLAN) (диаметральная гиперплоскость): VI, 2, 4.

DIAMÈTRE (диаметр) множества в метрическом пространстве: IX, 2, 2. Нем.: Durchmesser. Англ.: diameter.

Dichte Menge: плотное множество.

Direct product (прямое произведение) топологических групп (P): произведение топологических групп.

DISCONTINU (ENSEMBLE TOTALEMENT) (вполне несвязное множество): см. **TOTALEMENT DISCONTINU (ENSEMBLE)**.

DISCONTINUE (FONCTION) (разрывная функция). Нем.: unstetig. Англ.: discontinuous.

DISCRET (ANNEAU) (дискретное кольцо): III, 6, 3; — **(CORPS)**(— тело): III, 6, 7; — **(ESPACE)** (— пространство): I, 1, 1; — **(GROUPE)** (дискретная группа): III, 1, 1. || Под названием «дискретное пространство» Александров — Хопф понимают, более общим образом, всякое пространство (отделимое или нет), в котором всякое пересечение открытых множеств есть открытое множество; если такое пространство отделимо, то оно дискретно и в смысле текста книги.

Discrete set (дискретное множество) (N): замкнутое множество, все точки которого изолированные, или, что то же, множество, не имеющее предельных точек (см. **Accumulation (pointd')**).

DISCRÈTE (STRUCTURE UNIFORME) (дискретная равномерная структура): II, 1, 1; — **(TOPOLOGIE)** (— топология): I, 1, 1.

Diskontinuierliche Menge (H) (см. **Ponctiforme (ensemble)**).

Diskontinuierlicher Kompaktum (A—H): вполне несвязный метризуемый компакт.

Diskreter Raum (дискретное пространство) (A—H): см. **DISCRET (ESPACE)**.

Dispersé (ensemble) (польская школа): вполне несвязное множество.

DISQUE FERMÉ (— OUVERT) (замкнутый (открытый) круг): VI, 2, 3 (см. **CERCLE**). Нем.: Kreisscheibe.

DISTANCE (расстояние) между двумя точками: IX, 2, 1; — между точкой и множеством: IX, 2, 2; — между двумя множествами: IX, 2, 2; — **(EUCLIDIENNE)**

(евклидово): VI, 2, 1. Нем.: Entfernung, eigentliche Metrik (A—H) (для расстояния между двумя точками), untere Entfernung (H) (для расстояния между двумя множествами). Англ.: distance, metric. || В (K) «расстояние между двумя множествами» имеет тот же смысл, что «**Abweichung zweier Mengen**» (см.) в (A—H).

Distancié (espace) (F): метрическое пространство.

Distanz zweier Punkte (в метрическом пространстве) (H): нижняя грань чисел $\rho > 0$ таких, что данные две точки соединимы ρ-цепью.

Divergente Menge (A—H): бесконечное множество, не имеющее предельных точек (см. **Accumulation (pointd')**).

Divergente (suite, série): расходящаяся (последовательность, ряд). || Смысл этого слова применительно к последовательности или ряду вещественных чисел у разных авторов различен. У одних оно означает «не сходящийся»; другие применяют его только к последовательностям, сходящимся в $\overline{\mathbf{R}}$ к $+\infty$ или $-\infty$, или к рядам с суммой, равной $+\infty$ или $-\infty$; первые называют иногда такие последовательности (соотв. ряды) «собственно расходящимися» («proprement divergentes») или «несобственно сходящимися» («improprement convergentes»).

Domaine (область). Нем.: Gebiet. Англ.: domain, region (W). || Первые авторы работ по топологии часто называли «областью» произвольное открытое множество, «замкнутой областью» — замыкание открытого множества; в (K) еще используется этот последний термин, и «открытой областью» называется внутренность замкнутого множества.

Doppeltstetige Abbildung (взаимно непрерывное отображение) (H).

DROIT (ANGLE) (прямой угол) между прямыми: VIII, 2, 6; — **(SECTEUR ANGULAIRE)** (прямой угловой сектор): VIII, 2, 5. Нем.: rechter Winkel. Англ.: right angle.

DROIT POSITIF (ANGLE) (положительный прямой угол) между полупрямыми: VIII, 2, 2.

DROITE COMPLEXE (комплексная прямая) в пространстве C^n: VIII, 4, 3; — **NUMÉRIQUE** (числовая прямая): IV, 1, 3; англ.: real line (L), continuum of real numbers (Ho); — **PROJECTIVE RÉELLE** (— проективная вещественная): VI, 3, 1; — **PROJECTIVE COMPLEXE** (— проективная комплексная): VIII, 4, 3; — **RATIONNELLE** (— рациональная): I, 1, 2. Нем.: Gerade. Англ.: line, straight line.

Durchmesser: диаметр.

DYADIQUE (DÉVELOPPEMENT) (двоичное разложение) вещественного числа: IV, 8, 5.

E

Ebene (p-dimensionale) (p-мерная плоскость) p-мерное линейное многообразие.

ÉCART (отклонение): IX, 1, 1. || В (F) смысл слова «écart» другой: оно означает «Общую метрику» (см. **Allgemeine Metrik**) в смысле (A—H), для которой $f(y, x) = f(x, y)$, а $f(x, y) = 0$ равносильно $x = y$.

Écart de deux ensembles (K): расстояние между двумя множествами.

Également continue (famille): равностепенно непрерывное множество.

Eigentlich divergente Folge reeller Zahlen (C): последовательность вещественных чисел, сходящаяся в $\overline{\mathbf{R}}$ к $+\infty$ или $-\infty$; — —**Reihe reeller Zahlen** (C): ряд вещественных чисел с суммой $+\infty$ или $-\infty$.

Eigentliche Metrik (A—H): расстояние (между двумя точками).

Einheitskreis: единичная окружность.

Einheitssphäre: единичная сфера.

Einheitsvektoren (единичные векторы): векторы канонического базиса в $\mathbf{R}^n$.

ÉLÉMENTAIRE (ENSEMBLE) (элементарное множество) в произведении пространств: I, 4, 1; — **(FILTRE)** (элементарный фильтр), ассоциированный с последовательностью: I, 6, 8.

Endliche Funktion: конечная числовая функция.

ENGENDRÉ (FILTRE) (фильтр, порожденный некоторым множеством подмножеств): I, 6, 2.

ENGENDRÉE (TOPOLOGIE) (топология, порожденная некоторым множеством подмножеств): I, 2, 3.

Entfernung zweier Punkte: расстояние между двумя точками; — **zweier Mengen**: — между двумя множествами (C, A—H). В (H) слова «Entfernung zweier Mengen» имеют тот же смысл, что и слова «**Abweichung zweier Mengen**» (см.) в (A—H).

ENTOURAGE (окружение) равномерной структуры: II, 1, 1. ‖ В (K) слово «**entourage**» означает «окрестность» точки в топологическом пространстве.

ENVELOPPE INFÉRIEURE (— **SUPÉRIEURE**) (— нижняя (— верхняя) огибающая) семейства числовых функций: IV, 5, 5. Нем.: untere (obere) Grenze einer Folge von Funktionen (C).

ÉQUICONTINU (ENSEMBLE) (равностепенно непрерывное множество): X, 2, 1; — в точке: X, 2, 1; — относительно подмножества: X, 2, 3. В прежней терминологии: famille également continue (равнонепрерывное семейство). Англ.: equicontinuous family (у некоторых авторов «равностепенно непрерывное» означает «равномерно равностепенно непрерывное»).

ÉQUIVALENTES (FAMILLES D'ÉCARTS) (эквивалентные семейства отклонений): IX, 1, 2; — **(NORMES)** (— нормы): IX, 3, 3; — **(VALEURS ABSOLUES)** (— абсолютные значения): IX, 3, 2.

ÉQUIVALENTS (ÉCARTS) (эквивалентные отклонения): IX, 1, 2.

Equivalent metrics (эквивалентные метрики): расстояния, определяющие на одном и том же множестве одну и ту же топологию.

ESPACE DES VARIÉTÉS LINÉAIRES PROJECTIVES A P DIMENSIONS DE P (R) (пространство p-мерных проективных линейных многообразий в P_n (R)): VI, 3, 5; — **DE P_n** (C) (— в P_n (C)): VIII, 4, 1.

ESPACE NUMÉRIQUE A n DIMENSIONS (n-мерное числовое пространство): VI, 1, 1. Нем.: n-dimensionaler Raum; n-dimensionaler Zahlenraum. Англ.: n-dimensional continuum (Ho), Cartesian n-space (N), Euclidean n-space (L).

ESPACE NUMÉRIQUE COMPLEXE A n DIMENSIONS (n-мерное комплексное числовое пространство): VIII, 4, 1.

ESPACE PROJECTIF COMPLEXE à n **dimensions** (n-мерное комплексное проективное пространство): VIII, 4, 3; — **RÉEL à** n **dimensions** (n-мерное вещественное проективное пространство): VI, 3, 1.

Euclidean n**-space** (L): n-мерное числовое пространство.

EXPONENTIELLE (FONCTION) (показательная функция): V, 4, 1.

EXTÉRIEUR (внешность) множества: I, 1, 6.

EXTÉRIEUR (POINT) (внешняя точка) к множеству: I, 1, 6. Нем.: Äusserer Punkt einer Menge.

F

FACTEUR GÉNÉRAL (общий сомножитель) бесконечного произведения: III, 5, 7.

Factor group of a topological group (P): факторгруппа топологической группы.

FERMÉ (ENSEMBLE) (замкнутое множество): I, 1, 4. Нем.: abgeschlossene Menge. Англ.: closed set. || Слово «fermé» («замкнутое») часто применяется для обозначения всяких других понятий, принадлежащих алгебраической топологии, как, например, в выражениях: замкнутая кривая, замкнутая поверхность (в смысле «компактная кривая (соотв. поверхность) без края»). Та же возможность смешения существует в английском языке; ее избегают в немецком, говоря «abgeschlossene Menge», но «geschlossene Kurve».

Fermée (application) (замкнутое отображение): отображение топологического пространства E в топологическое пространство F, при котором образ всякого замкнутого множества из E есть замкнутое множество в F. Нем.: abgeschlossene Abbildung. Англ.: closed transformation.

Fermée (relation d'équivalence) (замкнутое отношение эквивалентности): отношение эквивалентности R в пространстве E, насыщение по которому всякого замкнутого множества замкнуто (иначе говоря, такое, что каноническое отображение E на факторпространство E/R замкнуто). (см.: **Zerlegung (stetige)** и **(Upper semi-continuous collection)**).

Fermeture (замыкание): см. **ADHÉRENCE.**

F_{II}**-Raum** (F_{II}-пространство) (H): метрическое пространство, в котором всякое замкнутое подпространство не тоще в себе.

FILTRE (фильтр): I, 6, 1; — **DES SECTIONS** (— сечений) фильтрующегося множества: I, 6, 3.

FILTRÉ (ENSEMBLE) (фильтрующееся множество): I, 6, 1.

FIN (см. **PLUS FIN** и **MOINS FIN**).

FINI (NOMBRE RÉEL) (конечное вещественное число): IV, 4, 2. Нем.: endlich. Англ.: finite.

FINIE (FONCTION NUMÉRIQUE) (конечная числовая функция): IV, 5, 1; — **(SOMME PARTIELLE)** (— частичная сумма): III, 5, 1.

Finite intersection property (collection of sets having the) (L): система образующих фильтра.

Flat (k**-)** (N): k-мерное аффинное линейное многообразие в R^n.

Fluctuation of a function (Ho): колебание функции.

Fonctionnel (espace) (функциональное пространство) (K): пространство ограниченных отображений метрического пространства E в метрическое пространство F, наделенное топологией равномерной сходимости.

Fondamentale (suite) (фундаментальная последовательность): последовательность Коши.

FRÉCHET (FILTRE DE) (фильтр Фреше): I, 6, 1.

Frontier of a set (N, W): граница множества.

FRONTIÈRE (граница) множества: I, 1, 6. Нем.: Begrenzung einer Menge. Англ.: boundary of a set (L, W), frontier of a set (N, W). ‖ Слово «frontière» иногда употребляется некоторыми авторами для обозначения понятия алгебраической топологии, родственного понятию «frontière» (в смысле настоящего текста), которое мы обозначаем словом «bord» (край). Такое же смешение имеет место в немецком языке с терминами «Begrenzung» и «Rand» и в английском с терминами «boundary» и «frontier». В этих языках, по-видимому, сейчас преобладает употребление слов «Begrenzung» и «frontier» в смысле «граница», а «Rand» и «boundary» в смысле «край».

FRONTIÈRE (POINT) (граничная точка) множества: I, 1, 6.

F_σ (ensemble) (множество F_σ): объединение счетного семейства замкнутых множеств.

Fundamentalfolge (фундаментальная последовательность): последовательность Коши.

G

G_δ (ensemble) (множество G_δ): пересечение счетного семейства открытых множеств.

Gebiet: область.

GÉNÉRATEURS (SYSTÈME DE) (система образующих) фильтра: I, 6, 2; — топологии: I, 1, 3.

Gerade, gerade Linie: прямая.

G_{II}-Raum (H): бэровское пространство (см. **BAIRE (ESPACE DE)**).

Gleichmässig: равномерно.

Gleichwertige Umgebungssysteme: фундаментальные системы окрестностей, определяющие одну и ту же топологию.

GRADE (градус), единица угла: VIII, 2, 3.

Greatest lower bound (сокращенно g.l.b.): нижняя грань.

Grenzwert einer konvergente Zahlenfolge (C): предел сходящейся последовательности вещественных чисел.

GROUPE ADDITIF (аддитивная группа) числовой прямой: IV, 1, 3; — числового пространства $\mathbf{R}^n$: VI, 1, 2; — вещественных чисел, сравнимых по модулю α: V, 1, 2.

GROUPE A UN PARAMÈTRE (однопараметрическая группа): V, 3.

H

Halbgerade: полупрямая.

Halbkreis: полуокружность (или иногда пересечение круга с полуплоскостью, определяемой одним из его диаметров).

Halbraum: полупространство.

Halbstetige Funktion (abwärts (C) или **nach unten)**: функция, полунепрерывная снизу; — **(aufwärts** (C) или **nach oben)**: функция, полунепрерывная сверху.

Halbstetigkeitspunkt (точка полунепрерывности) функции (C): точка, в которой числовая функция полунепрерывна.

Häufungspunkt einer Menge: предельная точка множества (см. **Accumulation (pointd')**).

Hauptlimes einer Zahlenfolge (C): верхний и нижний пределы последовательности вещественных чисел.

HAUSDORFF (ESPACE DE) (хаусдорфово (или отделимое) пространство): I, 8, 1. Нем.: Hausdorffscher Raum, T_2-Raum (A—H). Англ.: Hausdorff space, T_2-space (L).

HÉMISPHÈRE FERMÉ (— OUVERT) (замкнутая полусфера (открытая —)): VI, 2, 4.

Hilbert parallelotope (гильбертов кирпич) (L): произведение счетнобесконечного семейства компактных интервалов из **R**, не сводящихся к одной точке (или топологическое пространство, гомеоморфное такому произведению).

HOMÉOMORPHES (ESPACE TOPOLOGIQUES) (гомеоморфные топологические пространства): I, 1, 1.

HOMÉOMORPHIE (гомеоморфизм) двух топологических пространств: I, 1, 1.

HOMÉOMORPHISME (гомеоморфизм) топологического пространства на топологическое пространство: I, 1, 1. Нем.: Homöomorphie. Англ.: Homeomorphism (L, W).

HOMOGÈNE (ESPACE) topologique (однородное топологическое пространство): III, 2, 5. Англ.: space of right cosets (P).

Homogène (ensemble) (однородное множество) (K): подпространство A пространства E такое, что для любой пары точек a, b из A существует гомеоморфизм f пространства E на себя, при котором $f(A) = A$ и $f(a) = b$.

Homomorphism of a topological group into a topological group (P): непрерывное представление топологической группы в топологическую группу.

HOMOMORPHISME (гомоморфизм) топологической группы в топологическую группу: III, 2, 8; — топологической группы на топологическую группу: III, 2, 8. Англ.: open homomorphism of G into G' (P) (когда образ группы G при гомоморфизме открыт в G').

Hülle (оболочка): вообще, если $\mathfrak{F}$ — такое множество частей множества E, что всякое их пересечение снова принадлежит $\mathfrak{F}$, «оболочка» какого-либо $A \subset E$ относительно $\mathfrak{F}$ есть пересечение всех множеств из $\mathfrak{F}$, содержащих A. Пример: abgeschlossene Hülle (замыкание множества), когда $\mathfrak{F}$ — множество всех замкнутых подмножеств топологического пространства.

HYPERPLAN COMPLEXE (комплексная гиперплоскость) в пространстве $\mathbf{C}^n$: VIII, 4, 1.

HYPERPLAN DE PROJECTION (гиперплоскость проектирования) при стереографической проекции: VI, 2, 4.

Hyperspace of a decomposition (W): факторпространство.

I

IMAGE RÉCIPROQUE (прообраз) топологической структуры: I, 2, 3; — равномерной структуры: II, 2, 4.

IMAGINAIRE PUR (NOMBRE) (чисто мнимое число): VIII, 1, 1.

Im kleinen bikompakter Hausdorffscher Raum (A—H): локально компактное пространство.

Im kleinen kompakter Raum (A—H): пространство, всякая точка которого обладает замкнутой окрестностью, компактной в смысле Фреше (см. **COMPACT**).

IMPROPRE (DÉVELOPPEMENT) (несобственное разложение) вещественного числа: IV, 8, 3; — **(VALEUR ABSOLUE)** (— абсолютное значение): IX, 3, 2.

INDUIT (FILTRE) (индуцированный фильтр): I, 6, 5.

INDUITE (STRUCTURE UNIFORME) (индуцированная равномерная структура): II, 2, 4; — **(TOPOLOGIE)** (— топология): I, 2, 3.

Infimum: нижняя грань.

Innerer Punkt: внутренняя точка.

Inneres Produkt: скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$.

Insichdichte Menge: плотное в себе множество (см. **Dense en soi (ensemble)**).

INTÉRIEUR (внутренность) множества: I, 1, 6. Нем.: offener Kern einer Menge. Англ.: Interior of a set.

INTÉRIEUR (POINT) (внутренняя точка) множества: I, 1, 6. Нем.: Innerer Punkt. Англ.: Interior point.

Interior transformation (W): открытое отображение (см. **Ouverte (application)**).

INTERSECTION (FILTRE) (пересечение фильтров): I, 6, 2; — **(TOPOLOGIE)** (— топологий): I, 2, 3.

Interval (*n*-) (*n*-интервал) (L): ограниченный открытый кирпич в $\mathbf{R}^n$.

Interval (*n*-dimensionales) (*n*-мерный интервал) (C): ограниченный открытый кирпич в $\mathbf{R}^n$.

INVARIANTE (DISTANCE) (инвариантное расстояние) в группе: IX, 3, 1.

IRRATIONNEL (NOMBRE) (иррациональное число): IV, 1, 3.

Irreducible set (неприводимое множество) (Ho): множество, имеющее по крайней мере одну точку конденсации (см. **Condensation (point de)**).

Isolated set (изолированное множество) (N): множество, все точки которого изолированные (или также, дискретное подпространство).

ISOLÉ (POINT) (изолированная точка) множества: I, 1, 6.

Isolierter Teil einer Menge (изолированная часть множества) (H): множество всех изолированных точек множества.

ISOMÉTRIE (изометрия): IX, 2, 2.

ISOMÉTRIQUE (APPLICATION) (изометричное отображение): IX, 2, 2.

ISOMORPHES (ESPACES UNIFORMES) (изоморфные равномерные пространства): II, 1, 1.

ISOMORPHIE (изоморфность) двух равномерных пространств: II, 1, 1.

ISOMORPHISME (изоморфизм) равномерного пространства в равномерное пространство: II, 1, 1: — топологической группы на топологическую группу: III, 1, 3.

ISOMORPHISME LOCAL (локальный изоморфизм) топологической группы в топологическую группу: III, 1, 3.

K

Kern (ядро): вообще, если $\mathfrak{G}$ — такое множество частей множества E, что всякое их объединение снова принадлежит $\mathfrak{G}$, «ядро» какого-либо множества $A \subset E$ относительно $\mathfrak{G}$ есть объединение всех множеств из $\mathfrak{G}$, содержащихся в A (понятие, «дуальное» понятию «Hülle»). Пример: «offener Kern» (внутренность множества), когда $\mathfrak{G}$ — множество всех открытых подмножеств топологического пространства.

Kette (ε-) (A—H): ε-цепь; — (**Mengen** —) (ε-цепь множеств): конечная последовательность $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ подмножеств топологического пространства такая, что пересечения $A_i \cap A_{i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ не пусты.

Kohärenz einer Menge (H): множество всех неизолированных точек данного множества.

Kompakt in bezug auf den Raum: относительно компактный (для метризуемых пространств).

Kompaktum (компакт) (A—H): метризуемое компактное пространство.

Komponente: связная компонента; — (ε-) eines Punktes (ε-компонента точки) (A — H): множество всех точек метрического пространства, соединимых ε-цепью с рассматриваемой точкой; — (0-) (0-компонента точки) (A—H): множество всех точек, соединимых ε-цепью с рассматриваемой точкой для каждого $\varepsilon > 0$.

Kongruente Räume (конгруэнтные пространства) (A—H): изометрические метрические пространства (т. е. такие, что существует изометрия одного на другое).

Kontinuum: континуум (см. **Continu**).

Kreis: окружность (см. **CERCLE**).

Kugel (**abgeschlossene**) замкнутый шар; —(**offene**): открытый —.

Kugelfläche, Kugeloberfläche: сфера.

L

Länge der Kanten eines Würfels: длина сторон куба; — **eines Intervalls:** — интервала.

Least upper bound (сокращенно l.u.b.): верхняя грань.

Length of an interval: длина интервала.

Limes (**metrische, obere topologische, untere topologische, topologische**) einer Mengenfolge (A—H): предел (метрический, верхний топологический, нижний топологический, топологический) последовательности множеств.

Limes (**abgeschlossene, obere abgeschlossene, untere abgeschlossene**) einer Mengenfolge (H): предел (топологический, верхний топологический, нижний топологический) последовательности множеств.

Limes (obere offene) einer Mengenfolge (H): множество всех точек, обладающих окрестностью, содержащейся в бесконечном числе множеств последовательности; — (untere offene) einer Mengenfolge (H): множество всех точек, обладающих окрестностью, содержащейся во всех, кроме конечного числа, множествах последовательности. Когда обп предела совпадают, их называют, следуя Хаусдорфу, «offene Limes der Mengenfolge».

Limit (inferior, superior) of a sequence of sets (W): (нижний, верхний) топологический предел последовательности множеств.

Limit-point of a set (N, W): предельная точка (см. **Accumulation (point d')**) множества.

LIMITE A DROITE (— A GAUCHE) (предел справа (— слева)) функции вещественной переменной: IV, 5, 3. Нем.: Grenzwert nach rechts (— nach links). Англ.: limit to the right (— to the left).

LIMITE INFÉRIEURE (— SUPÉRIEURE) (нижний (верхний) предел) числовой функции по фильтру: IV, 5, 2. Нем.: Untere (obere) Limes einer Funktion. Англ.: Minimum (maximum) of a function at a point (Ho).

Limite inférieure topologique (нижний топологический предел) последовательности множеств: множество всех точек, каждая окрестность которых пересекается со всеми множествами последовательности, за исключением конечного их числа.

Limite métrique (метрический предел) последовательности замкнутых множеств: для любых замкнутых множеств A, B метрического пространства положим

$$\rho(A, B) = \max\left(\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A)\right).$$

Говорят, что замкнутое множество A есть метрический предел последовательности замкнутых множеств (A_n), если $\rho(A, A_n)$ стремится к 0, когда n неограниченно возрастает.

Limite supérieure topologique (верхний топологический предел) последовательности множеств: множество всех точек, каждая окрестность которых пересекается с бесконечным числом множеств данной последовательности.

Limite topologique (топологический предел) последовательности множеств: так называют верхний и нижний топологические пределы последовательности множеств в том случае, когда они совпадают.

LIMITE (POINT) (предел) базиса фильтра: I, 7, 1; — фильтра: I, 7, 1.

LIMITE (VALEUR) (предел) функции по фильтру: I, 7, 3; — функции в точке относительно подмножества: I, 7, 5; — последовательности: I, 7, 3.

LIMITÉ (DÉVELOPPEMENT) d'un nombre réel (конечное) разложение вещественного числа: IV, 8, 3.

Local, localement (локальный, локально): слова, характеризующие свойства, связанные с фиксированной точкой x_0 пространства E и остающиеся в силе при замене его топологии другой топологией, подчиненной единственному условию, чтобы существовала окрестность точки x_0, в которой обе индуцируемые топологии совпадают; иначе говоря, свойства, связанные

с функцией, определенной в некоторой окрестности точки x_0 и остающиеся в силе при замене этой функции другой, подчиненной единственному условию, чтобы существовала окрестность точки x_0, в которой обе функции совпадают. Расширительно, эти слова часто применяются ко всему пространству (например: локально компактное пространство, локально связное пространство), означая тогда, что одно и то же «локальное» свойство имеет место в каждой точке пространства. Нем.: im kleinen, lokal. Англ.: local, locally.

LOCALEMENT COMPACT (ESPACE) (локально компактное пространство): I, 9, 7. Нем.: im kleinen bikompakter Hausdorffscher Raum (A—H). Англ.: locally compact Hausdorff space (L). || Локально компактное пространство в смысле (L) (локально бикомпактное в смысле (A—H)) — это пространство, каждая точка которого обладает окрестностью, замыкание которой есть пространство, удовлетворяющее аксиоме (C) (но не обязательно отделимое). По старой терминологии под локально компактным пространством подразумевалось пространство, всякая точка которого обладает замкнутой окрестностью, компактной в смысле Фреше (см. **COMPACT**).

LOCALEMENT CONNEXE (ESPACE) (локально связное пространство): I, 11, 6. Нем.: local zusammenhängender Raum. Англ.: locally connected space.

Localement fermé (ensemble) (локально замкнутое множество) в точке (K): множество, данная точка которого обладает окрестностью, пересечение которой с множеством замкнуто (во всем пространстве).

Localement fini (recouvrement) (локально конечное покрытие): такое покрытие топологического пространства E, что каждая точка $x \in E$ обладает окрестностью, пересекающейся только с конечным числом множеств покрытия.

LOCALEMENT ISOMORPHES (GROUPES TOPOLOGIQUES) (локально изоморфные топологические группы): III, 1, 3.

Localement uniformément convergente (suite) (локально равномерно сходящаяся последовательность): последовательность функций f_n, определенных на топологическом пространстве E, со значениями в равномерном пространстве F, локально равномерно сходится к функции f в точке $x_0 \in E$, если для любого окружения V для F существуют целое число n_0 и окрестность U точки x_0 такие, что $(f_n(x), f(x)) \in V$ для всех $x \in U$ и всех $n \geqslant n_0$.

LOGARITHME (логарифм) вещественного числа: V, 4, 1.

LONGUEUR (длина) интервала: IV, 1, 5. Нем.: Länge. Англ.: length.

Lower boundary of a function (Ho): нижняя грань числовой функции.

Lower semi-continuous function: функция, полунепрерывная снизу.

M

MAIGRE (ENSEMBLE) (тощее множество): IX, 5, 2. В прежней терминологии: множество первой категории.

MAJORÉE (FONCTION NUMÉRIQUE) (ограниченная сверху числовая функция): IV, 5, 1. Нем.: nach oben beschränkte Funktion. Англ.: bounded to the right, bounded from above.

Maximée (point d'accumulation) (максимальная предельная точка) множества (F): максимальная предельная точка множества A в пространстве E это точка x_0, пересечение каждой окрестности которой с A равномощно A.

Maximum of a function at a point (Ho): верхний предел функции в точке.

MESURE PRINCIPALE (главная мера) угла между полупрямыми: VIII, 2, 3.

MESURES (меры) угла между полупрямыми: VIII, 2, 3; — угла между прямыми: VIII, 2, 6.

MÉTRIQUE (ESPACE) (метрическое пространство): IX, 2, 1. В прежней терминологии (F): espace distancié. Нем.: metrischer Raum. Англ.: metric space.

MÉTRISABLE (ESPACE TOPOLOGIQUE) (метризуемое топологическое пространство): IX, 2, 5; — **(ESPACE UNIFORME)** (—равномерное пространство): IX, 2, 4; — **(GROUPE TOPOLOGIQUE)** (метризуемая топологическая группа): IX, 3, 1. Нем.: metrisierbarer Raum. Англ.: metrizable space (L).

Metrisches Produkt zweier metrische Räume (метрическое произведение двух метрических пространств) (A—H): произведение метрических пространств E, E', в котором расстояние между точками (x, x') и (y, y') определено формулой $\sqrt{(d(x,y))^2 + (d'(x',y'))^2}$, где d и d' — расстояния соответственно в E и E'.

MINORÉE (FONCTION NUMÉRIQUE) (ограниченная снизу числовая функция): IV, 5, 1. Нем.: nach unten beschränkte Funktion. Англ.: bounded to the left, bounded from below.

Minimum of a function at a point (Ho): нижний предел функции в точке.

Mittelpunkt eines Kugels: центр сферы (или шара).

MOINS FIN (FILTRE) (мажорируемый фильтр): I, 6, 2 (см. **STRICTEMENT**).

MOINS FINE (STRUCTURE UNIFORME) (мажорируемая равномерная структура): II, 2, 2; — **(TOPOLOGIE)** (— топология): I, 2, 2 (см. **STRICTEMENT**). Нем.: schwächere Topologie. Англ.: weaker topology.

MULTIPLIABLE (FAMILLE) (перемножаемое семейство): III, 5, 1; — **(SUITE)** (перемножаемая последовательность) в нормированной алгебре: IX, Прил., 1.

N

Nach oben (— unten) beschränkte Funktion: функция, ограниченная сверху (снизу); — **halbstetige Funktion:** функция, полунепрерывная сверху (снизу).

Natural homomorphism of a topological group on a factor group (P): канонический гомоморфизм топологической группы на факторгруппу.

Neighbo(u)rhood of a point: открытая окрестность точки; — of a set: открытая окрестность множества; — (ε-) of a set (L): множество всех точек, отстоящих от данного множества (в метрическом пространстве) на расстояние $< \varepsilon$.

Net (ε-) (N), Netz (ε-) (A—H) (ε-сеть): конечное множество (в метрическом пространстве), от которого всякая точка пространства удалена на расстояние $< \varepsilon$.

Nirgendsdichte Menge (нигде не плотное множество): разреженное множество.
Non dense (ensemble) (неплотное множество) (К): разреженное множество.
NORMAL (ESPACE) (нормальное пространство): IX, 4, 1. Нем.: normaler Raum, T_4-Raum (A—H). Англ.: normal space; — **(espace complètement)** (вполне нормальное пространство): см. **Complètement normal (espace)**.
NORMALEMENT CONVERGENTE (SÉRIE) (нормально сходящийся ряд): X, 3, 2.
NORME (норма) на векторном пространстве: IX, 3, 3; нем. и англ.: norm.; — **ALGÉBRIQUE** (— алгебраическая) комплексного числа: VIII, 1, 1; — **EUCLIDIENNE** (— евклидова) в $\mathbf{R}^n$: VI, 2, 1; нем.: absoluter Betrag eines Vektors (C).
NORMÉ (ESPACE) (нормированное пространство): IX, 3, 3. Нем.: normierter Raum. Англ.: normed space.
NORMÉE (ALGÈBRE) (нормированная алгебра): IX, 3, 7.
Nowhere dense set (нигде не плотное множество): разреженное множество.
NUMÉRIQUE (FONCTION) (числовая функция): IV, 5, 1.

O

Obere Entfernung zweier Mengen A, B (H): верхняя грань расстояний $d(x, y)$, когда x пробегает A, а y пробегает B (в метрическом пространстве).
Obere Grenze einer Funktion: верхняя грань функции; — **einer Folge von Funktionen**: верхняя огибающая последовательности функций.
Obere Limes einer Funktion: верхний предел функции по фильтру; — **einer Folge**: верхний предел последовательности.
OBTUS (SECTEUR ANGULAIRE) (тупой угловой сектор): VIII, 2, 5. Нем.: stumpfer Winkel. Англ.: obtuse angle.
Offene Abbildung: открытое отображение (см. **Ouverte (application)**); — **Menge**: открытое множество; — **Überdeckung einer Menge**: открытое покрытие множества.
Offener Kern einer Menge (открытое ядро): внутренность множества.
Open covering of a set: открытое покрытие множества; — **homomorphism** of a topological group G into a topological group G' (P): гомоморфизм G на открытую подгруппу группы G'; — **set**: открытое множество; — **transformation**: открытое отображение (см. **Ouverte (application)**).
ORTHOGONAL (GROUPE) (ортогональная группа): VI, 2, 2.
ORTHOGONALE (TRANSFORMATION) (ортогональное преобразование): VI 2, 2.
ORTHOGONALES (VARIÉTÉS LINÉAIRES AFFINES) (ортогональные аффинные линейные многообразия): VI, 2, 2.
ORTHOGONAUX (VECTEURS) (ортогональные векторы): VI, 2, 2. Нем.: senkrechte Vektoren.
OSCILLATION (колебание) функции на множестве: IX, 2, 3; — функции в точке: IX, 2, 3. Нем.: Schwankung einer Funktion. Англ.: oscillation of a function, fluctuation of a function (Ho).

Oscillation einer Funktionenfolge (колебание последовательности функций) (H): для последовательности числовых функций (f_n) это функция, равная $\limsup_{n\to\infty} f - \liminf_{n\to\infty} f_n$ во всех точках, где эта разность определена.

OUVERT (ENSEMBLE) (открытое множество): I, 1, 1; — **(RECOUVREMENT)** (— покрытие): 1, 1, 1. Нем.: offen. Англ.: open. || Слово «ouvert» иногда употребляется для обозначения всяких других понятий, как, например, в выражении «открытая поверхность» (некомпактная поверхность без края) в алгебраической топологии и в выражении «открытая группа» (не компактная группа) в теории групп Ли.

Ouverte (application) (открытое отображение): отображение топологического пространства E в топологическое пространство F, при котором образ всякого открытого множества из E есть открытое множество в F. Нем.: offene Abbildung. Англ.: interior transformation (W), open transformation (L).

Ouverte (relation d'équivalence) (открытое отношение эквивалентности): отношение эквивалентности R в пространстве E, насыщение по которому всякого открытого множества есть открытое множество (другими словами, такое, что каноническое отображение E на факторпространство E/R открыто).

OUVERTURE (раствор) углового сектора: VIII, 2, 5.

P

p-ADIQUE (VALEUR ABSOLUE) (p-адическое абсолютное значение): IX, 3, 2. Нем.: p-adische Bewertung. Англ.: p-adic valuation (или absolute value).

Paracompact (espace) (паракомпактное пространство): отделимое пространство E, для всякого открытого покрытия (A_α) которого существует локально конечное (см. **Localement fini (recouvrement)**) открытое покрытие (B_β) такое, что каждое B_β содержится хотя бы в одном A_α.

PARALLÉLOTOPE FERMÉ (— OUVERT) (параллелепипед замкнутый (— открытый)): VI, 1, 3.

Parallélotope (n-) (n-параллелепипед) (L): компактный кирпич в $\mathbf{R}^n$, обладающий внутренней точкой, или, более общим образом, пространство, гомеоморфное такому кирпичу.

PARAMÈTRES DIRECTEURS (направляющие параметры) прямой: VI, 1, 4.

PARFAIT (ENSEMBLE) (совершенное множество): I, 1, 6. Нем.: perfekt. Англ.: perfect.

Parfaitement compact en soi (espace de Hausdorff) (F): компактное пространство.

Parfaitement séparable (espace) (F): пространство, имеющее счетный базис.

PARTIE ENTIÈRE (целая часть) вещественного числа: IV, 8, 2; — **IMAGINAIRE** (мнимая часть) комплексного числа: VIII, 1, 1; — **RÉELLE** (вещественная часть) комплексного числа: VIII, 1, 1.

PARTIELLE (SOMME) (частичная сумма): III, 5, 3.

PARTITION CONTINUE DE L'UNITÉ (непрерывное разбиение единицы): IX, 4, 3.

PARTITIONS FINIES (STRUCTURE UNIFORME DES) (равномерная структура конечных разбиений): II, 2, 2.

PARTOUT DENSE (ENSEMBLE) (всюду плотное множество): I, 1, 6. Нем.: im Raum dichte Menge. Англ.: dense set (L, N).

Partout non dense (ensemble) (нигде не плотное множество): разреженное множество.

PAVÉ FERMÉ (замкнутый кирпич): VI, 1, 1; — **OUVERT** (открытый —): VI, 1, 1. Нем.: n-dimensionales Intervall (C). Англ.: n-interval (L).

PÉRIODE (период) функции: VII, 1, 6.

PÉRIODIQUE (FONCTION) (периодическая функция): VII, 1, 6.

PETIT D'ORDRE V (ENSEMBLE) (малое порядка V множество): II, 3, 1.

PLAN COMPLEXE (комплексная плоскость) в пространстве C^n: VIII, 4, 3; — **NUMÉRIQUE** (числовая —): VI, 1, 1; — **PROJECTIF RÉEL** (вещественная проективная —): VI, 3, 1; **PROJECTIF COMPLEXE** (комплексная проективная —); VIII, 4, 3. Нем.: Ebene.

PLAT (SECTEUR ANGULAIRE) (развернутый угловой сектор): VIII, 2, 5.

PLUS FIN (FILTRE) (мажорирующий фильтр); I, 6, 2 (см. **STRICTEMENT**).

PLUS FINE (STRUCTURE UNIFORME) (мажорирующая равномерная структура): II, 2, 2; — **(TOPOLOGIE)** (— топология): I, 2, 2 (см. **STRICTEMENT**). Нем.: stärkere Topologie. Англ.: stronger topology.

POINT DE VUE (центр) стереографической проекции: VI, 2, 4.

Point of closure of a set (N): точка прикосновения множества.

POLYNOMES (полиномы) относительно данного множества числовых функций (с коэффициентами из нормированного пространства): X, 4, 2.

Ponctuellement discontinue (fonction): функция с тощим множеством точек разрыва.

PRÉCOMPACT (ESPACE UNIFORME) (предкомпактное равномерное пространство): II, 4. 2. Нем.: total beschränkter Raum, bedingt kompakter Raum (H). Англ.: totally bounded space.

PRODUIT D'UNE FAMILLE MULTIPLIABLE (произведение перемножаемого семейства) в коммутативной группе: III, 5, 1; — **D'UNE SUITE MULTIPLIABLE** (— перемножаемой последовательности) в нормированной алгебре: IX, Прил., 1.

PRODUIT INFINI (бесконечное произведение) в коммутативной группе: III, 5, 7; — в нормированной алгебре: IX, Прил., 3.

PRODUIT (ANNEAU TOPOLOGIQUE) (произведение топологических колец): III, 6, 4; — **(ESPACE TOPOLOGIQUE)** (топологических пространств): I, 4, 1; — **(ESPACE UNIFORME)** (— равномерных пространств): II, 2, 6; — **(GROUPE TOPOLOGIQUE)** (— топологических групп): III, 2, 9; англ.: direct product of topological groups (P); — **(STRUCTURE UNIFORME)** (равномерных структур); II, 2, 6; — **(TOPOLOGIE)** (— топологий) I, 4, 1.

Prolongement (продолжение) метрического пространства (K): пополнение.

PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ (продолжение отображения по непрерывности): I, 8, 5.

Propriété de Borel (ensemble ayant la) (F) (множество со свойством Бореля): множество A, всякое счетное открытое покрытие которого содержит конечное покрытие.

Propriété de Lindelöf (ensemble ayant la) (множество со свойством Линделефа): множество A, всякое открытое покрытие которого содержит счетное покрытие.

Punctiforme (ensemble) (польская школа): множество, не содержащее ни одного неодноточечного связного компактного множества. Нем.: diskontinuierliche Menge (H).

Punkthafte Menge (H): вполне несвязное множество.

Q

QUADRANT (квадрант): VIII, 2, 5.

Quadrat: квадрат.

Quasi-composant of a set (квазикомпонента) множества (L) (см. **Constituant**).

Quasi-uniformément convergente (suite) (квазиравномерно сходящаяся последовательность): последовательность функций f_n, определенных на топологическом пространстве E со значениями в равномерном пространстве F, сходится квазиравномерно на E к функции f, если она сходится к f в каждой точке и для всякого окружения V из F и всякого целого числа n_0 существует конечное число целых чисел $m_i \geqslant n_0$ таких, что, каково бы ни было $x \in E$, существует хотя бы один индекс i, для которого $(f_{m_i}(x), f(x)) \in V$.

QUOTIENT (ANNEAU TOPOLOGIQUE) (топологическое факторкольцо); III, 6, 4; — **(ESPACE TOPOLOGIQUE)** (топологическое факторпространство): I, 3, 4; нем.: Zerlegungsraum; англ.: decomposition space, hyperspace of a decomposition (W); — **(GROUPE TOPOLOGIQUE)** (топологическая факторгруппа): III, 2, 6. англ.: factor group of a topological group (P); — **(TOPOLOGIE)** (фактортопология): I, 3, 4. || B (A—H) на фактормножестве E/R определяется также топология, мажорирующая фактортопологию: за окрестности точки $z \in E/R$ в этой топологии принимаются канонические образы наибольших насыщенных по R множеств, содержащихся в окрестностях множества $\varphi^{-1}(z)$ в E, где φ — каноническое отображение E на E/R; E/R, наделенное этой топологией, называется «schwacher Zerlegungsraum».

R

RACINE (CARRÉE, CUBIQUE, n-ÈME) (корень квадратный, кубический, n-й степени) из вещественного числа: IV, 3, 3. Нем.: Wurzel. Англ.: root.

RADIAN (радиан) (единица угла): VIII, 2, 3.

Rand einer Menge (край множества) (H, A—H): пересечение рассматриваемого множества с его границей (см. **FRONTIÈRE**)

Randpunkt einer Menge: граничная точка рассматриваемого множества, принадлежащая этому множеству.

RARE (ENSEMBLE) (разреженное множество): IX, 5, 1. В прежней терминологии: нигде не плотное множество. Нем.: Nirgendsdichte Menge. Англ.: nowhere dense set, nondense set (Ho).

RATIONNEL (RANG) (рациональный ранг) подгруппы группы $\mathbf{R}^n$: VII, 1.

Raum (*n*-dimensionaler): *n*-мерное числовое пространство.

Ray: полупрямая.

RAYON (радиус) евклидова шара (— евклидовой сферы): VI, 2, 3; — шара (— сферы) в метрическом пространстве: IX, 2, 2. Нем.: Radius. Англ.: radius.

Rechteck: прямоугольник (двумерный кирпич).

Rechter Winkel: прямой угол.

RÉEL (NOMBRE) (вещественное число): IV, 1, 3.

RÉELLE (FONCTION) (вещественная функция): IV, 5, 5.

Region (область) (L): открытое множество в метрическом пространстве; — (W): область в метрическом пространстве.

RÉGULIER (ESPACE) (регулярное пространство): I, 8, 4. Нем.: regulärer Raum, T_3-Raum (A—H). Англ.: regular space; — (**ESPACE COMPLÈTEMENT**) (вполне регулярное пространство): см. **COMPLÈTEMENT RÉGULIER (ESPACE)**.

Reihe: ряд.

Relativ abgeschlossene, —offene, —perfekte Menge (H): множество, замкнутое (соотв. открытое, совершенное) относительно подпространства.

RELATIVEMENT COMPACT (ENSEMBLE) (относительно компактное множество): I, 9, 3. Нем.: in Bezug auf den Raum kompakte Menge (в случае метризуемых пространств; в произвольном пространстве этот термин означает в (A—H) «компактное множество» в смысле Фреше; см. **Compact**).

Relativierung, relativization (релятивизация): переход к топологии, индуцируемой в подмножестве данной топологией.

Relativraum: подпространство.

RENTRANT (SECTEUR ANGULAIRE) (входящий угловой сектор): VIII, 2, 5.

Résiduel (ensemble): дополнение к тощему множеству (в бэровском пространстве). || Отметим, что слово «Residuum» означает в (H) совсем другое понятие.

RESTE (остаток) ряда: III, 5, 6.

Right angle: прямой угол.

Root (*n*-th) of a real number: корень *n*-й степени из вещественного числа.

S

SAILLANT (SECTEUR ANGULAIRE) (выступающий угловой сектор): VIII, 2, 5.

SATURÉE (FAMILLE D'ÉCARTS) (насыщенное семейство отклонений) IX, 1, 2.

Scattered set: нигде не плотное в себе множество (см. **Clairsemé (ensemble)**).

Schwache Erweiterung eines Raumes (слабое расширение пространства) (A—H): пространство, получаемое путем присоединения к данному пространству E «бесконечно удаленной точки» ω и выбора в качестве открытых множеств в $E \cup \{\omega\}$ открытых множеств из E, а также дополнений (в $E \cup \{\omega\}$) к замкнутым множествам из E, компактным в смысле Фреше.

Schwankung einer Funktion: колебание функции.

SECTEUR ANGULAIRE (угловой сектор): VIII, 2, 5. В прежней терминологии: угол.

SEGMENT FERMÉ (— **OUVERT**, — **OUVERT EN** x, **FERMÉ EN** y) (отрезок замкнутый (— открытый, — открытый в x, — замкнутый в y): VI, 1, 4. Нем.: Strecke (C) (замкнутый отрезок).

Segment (отрезок) (L): компактный интервал в R.

Semi-circle: полуокружность.

SEMI-CONTINUE INFÉRIEUREMENT (FONCTION NUMÉRIQUE) (числовая функция, полунепрерывная снизу): IV, 6, 2; — **SUPÉRIEUREMENT (FONCTION NUMÉRIQUE)** (— — — сверху): IV, 6, 2. Нем.: abwärts (aufwärts) halbstetige Funktion (C), nach unten (nach oben) halbstetige Funktion.

Senkrechte Vektoren: ортогональные векторы.

Séparable (espace) (сепарабельное пространство) (F): топологическое пространство, в котором существует счетное всюду плотное множество. || В случае метризуемых пространств понятие сепарабельного пространства совпадает с понятием пространства со счетной базой. От термина «séparable» следует отказаться, ибо он приводит к смешению с понятием «separation» в топологических пространствах, относящимся к совсем другим вопросам.

Séparant (ensemble) (отделяющее множество) для двух множеств (K): множество C отделяет A от B, если $\complement C = U \cup V$, где U и V — отделенные множества (см. **Séparés (ensembles)**) такие, что $A \subset U$ и $B \subset V$.

SÉPARANTE (FAMILLE DE FONCTIONS) (отделяющее семейство функций): X, 4, 1. Англ.: separating class of functions (L).

Separation of a space (W): разбиение пространства на два замкнутых множества.

Séparation (axiomes de) (аксиомы отделимости):

1) *Аксиома Колмогорова* (или аксиома (T_0) (A—H, L)): для любых двух различных точек x и y существует окрестность одной из них, которая не содержит другой (что равносильно тому, что $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$).

2) *Аксиома Фреше* (или аксиома (T_1) (A—H, L)): для любых двух различных точек x и y существует окрестность каждой из них, не содержащая другой. Пространство, удовлетворяющее этой аксиоме, называется *достижимым*.

3) *Аксиома Хаусдорфа*, или аксиома (H) (или аксиома (T_2) (A—H), L)): для любых двух различных точек x и y существуют окрестность точки x и окрестность точки y, не имеющие общих точек; I, 8, 1. Пространство,

удовлетворяющее этой аксиоме, называется *отделимым* (*или хаусдорфовым*).

4) *Аксиома Урысона:* для любых двух различных точек x и y существуют *замкнутая* окрестность x и *замкнутая* окрестность y, не имеющие общих точек.

5) *Аксиома Виеториса*, или аксиома (O_{III}) (или аксиома (T_3) (А—Н)): для любого замкнутого множества A и любой точки $x \notin A$ существуют окрестность точки x и окрестность множества A, не имеющие общих точек; I, 8, 4. *Отделимое* пространство, удовлетворяющее этой аксиоме, называется *регулярным*.

6) *Аксиома Тихонова*, или аксиома (O_{IV}): для любого замкнутого множества A и любой точки $x \notin A$ существует числовая функция f, непрерывная на E, со значениями в интервале $[0, 1]$, равная 1 в точке x и 0 на A; IX, 1, 5. Пространство, удовлетворяющее этой аксиоме, называется *равномеризуемым*.

7) *Первая аксиома Титце*, или аксиома (O'_V) (или аксиома (T_4) (А—Н)): для любых непересекающихся замкнутых множеств A и B существуют окрестность множества A и окрестность множества B, не имеющие общих точек; IX, 4, 1. *Отделимое* пространство, удовлетворяющее этой аксиоме, называется *нормальным*.

8) *Вторая аксиома Титце* (или аксиома (T_5) (А—Н)): для любых множеств A и B, ни одно из которых не содержит точек прикосновения другого, существуют окрестность множества A и окрестность множества B, не имеющие общих точек. *Отделимое* пространство, удовлетворяющее этой аксиоме, называется *вполне нормальным*.

Нем.: Trennungsaxiome.

SÉPARÉ (ESPACE TOPOLOGIQUE) (отделимое топологическое пространство): I, 8, 1; нем.: Hausdorffscher Raum, T_2-Raum (А—Н); англ.: Hausdorff space, T_2-space (L); — **(ESPACE UNIFORME)** (отделимое равномерное пространство): II, 3, 8. || Поскольку аксиома Хаусдорфа — наиболее важная из аксиом отделимости (см. **Séparation (axiomes de)**) общей топологии, именно пространствам, удовлетворяющим этой аксиоме, мы присвоили наименование *отделимых*.

SÉPARÉE (STRUCTURE UNIFORME) (отделимая равномерная структура): II, 1, 2; — **(TOPOLOGIE)** (— топология): I, 8, 1.

Séparés (ensembles) (отделенные множества) (К): множества A, B, ни одно из которых не содержит точек прикосновения другого.

Separierte Menge (Н): нигде не плотное в себе множество (см. **Clairsemé (ensemble)**).

Sequentially compact space (секвенциально компактное пространство) (L): пространство, каждая бесконечная последовательность точек которого обладает сходящейся подпоследовательностью. || Это понятие совпадает с понятием пространства «компактного в себе» в смысле Фреше (см. **Compact**), если каждая точка пространства обладает счетной фундаментальной системой окрестностей.

SÉRIE (ряд): III, 5, 6. Нем.: Reihe. Англ.: Series.

SIMPLEMENT CONVERGENT (FILTRE) (просто сходящийся фильтр): X, 1, 3.

SIMPLEMENT CONVERGENTE (FAMILLE) (семейство, просто сходящееся) по фильтру: X, 1, 3; — **(SÉRIE)** (— сходящийся ряд): X, 1, 2 — 3; — **(SUITE)** (— сходящаяся последовательность): X, 1, 2 — 3. Англ.: pointwise convergent sequence of functions.

Simplement uniformément convergente (suite) en un point: последовательность функций f_n, определенных на топологическом пространстве E, со значениями в равномерном пространстве F просто равномерно сходится в точке $x_0 \in E$ к функции f, если она сходится просто к f в некоторой окрестности точки x_0 и для каждого окружения V из F и каждого целого n_0 существуют окрестность U точки x_0 и целое $n \geqslant n_0$ такие, что $(f_n(x), f(x)) \in V$ для всех $x \in U$.

Singulärer Punkt eines Raumes (H): точка, не обладающая фундаментальной системой связных окрестностей.

SINUS (синус) угла: VIII, 2, 4; — числа: VIII, 2, 4.

SOMMABLE (FAMILLE) (суммируемое семейство): III, 5, 1.

SOMME (сумма) семейства: III, 5, 1; — ряда: III, 5, 6.

SOMME (ESPACE TOPOLOGIQUE) (топологическая сумма семейства пространств): I, 2, 4; — **(TOPOLOGIE)** (сумма семейства топологий): I, 2, 4.

SOUS-GROUPE (подгруппа) топологической группы: III, 1, 1.

SOUS-ESPACE (подпространство) топологического пространства: I, 3, 1; — равномерного пространства: II, 2, 4. Нем.: Relativraum, Unterraum. Англ.: sub-space.

SPHÈRE (сфера) в метрическом пространстве: IX, 2, 2; — **EUCLIDIENNE** (— евклидова): VI, 2, 3; в прежней терминологии: hypersphère; нем.: Sphäre, Kugelfläche, Kugeloberfläche; англ.: n-sphere (см. **CERCLE**); — **UNITÉ** (— единичная); VI, 2, 3.

Sphère fermée (— ouverte) в метрическом пространстве (K): замкнутый (открытый) шар.

Sphere (L): открытый шар.

Sphere (-n): открытый шар (F); топологическое пространство, гомеоморфное S_n (L).

Spheroid (сфероид) (L): открытый шар.

Sphéroïde (F): замкнутый шар.

Spitzer Winkel: острый угол.

S-space (F): метризуемое пространство, обладающее счетной базой.

Starke Erweiterung eines Raumes (A—H): пространство, получаемое путем присоединения к данному пространству E «бесконечно удаленной» точки ω и выбора в качестве открытых множеств в $E \cup \{\omega\}$ открытых множеств из E, а также дополнений (в $E \cup \{\omega\}$) к бикомпактным (см. **Bicompact (espace)**) замкнутым множествам из E.

Stark stetige Abbildung (сильно непрерывное отображение) (A—H): непрерывное отображение f пространства E в пространство F, при котором для

любого замкнутого множества A из E, насыщенного по отношению эквивалентности $f(x) = f(y)$, $f(A)$ замкнуто в F.

Steigung einer Strecke: наклон прямой.

STÉRÉOGRAPHIQUE (PROJECTION) (стереографическая проекция): VI, 2, 4.

Stetig: непрерывный.

Strahl (луч): полупрямая.

Straight line: прямая.

Strecke: замкнутый отрезок.

STRICTEMENT (строго): напомним (см. Книга I, гл. III), что вообще, если некоторое слово выражает, что элементы x, y данного множества связаны некоторым отношением порядка, то оно же, предваренное словом «strictement», означает, что x, y связаны тем же отношением порядка и, кроме того, $x \neq y$. Например: фильтр $\mathfrak{F}$ строго минорирует фильтр $\mathfrak{F}'$, если $\mathfrak{F}$ минорирует $\mathfrak{F}'$, и, кроме того, $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}'$.

Stronger topology: мажорирующая топология.

STRUCTURE UNIFORME (равномерная структура): II, 1, 1; — **ADDITIVE** (аддитивная — —) топологического тела: III, 6, 8; — **ADDITIVE** (аддитивная — —) числовой прямой: IV, 1, 6; — **ADDITIVE** (аддитивная — —) в $\mathbf{R}^n$: VI, 1, 2; — **DE LA CONVERGENCE COMPACTE** (— — компактной сходимости): X, 1, 3; — **DE LA CONVERGENCE SIMPLE** (— — простой сходимости): X, 1, 3; — **DE LA CONVERGENCE UNIFORME** (— — равномерной сходимости): X, 1, 3; — **DE LA CONVERGENCE UNIFORME DANS LES ENSEMBLES D'UN FAMILLE** (— — равномерной сходимости на семействе множеств): X, 1, 2; — **DÉFINIE PAR UNE FAMILLE D'ÉCARTS** (— —, определенная семейством отклонений): IX, 1, 2; — **DROITE** (правая — —) топологической группы: III, 3, 1; — **GAUCHE** (левая — —) топологической группы: III, 3, 1; — **MULTIPLICATIVE** (мультипликативная — —) топологического тела: III, 6, 8.

Stumpfer Winkel: тупой угол.

Subbase of a space (подбаза пространства) (L): система образующих топологии; — at a point x_0 (— в точке x_0) (L): множество открытых окрестностей точки x_0, составляющих систему образующих фильтра ее окрестностей.

SUBORDONNÉE (PARTITION CONTINUE DE L'UNITÉ) разбиение единицы, подчиненное локально конечному открытому покрытию: IX, 4, 3.

Supremum: верхняя грань.

SYMÉTRIQUE (ENTOURAGE) (симметричное окружение): II, 1, 1; — **(VOISINAGE)** (симметричная окрестность) нейтрального элемента в топологической группе: III, 1, 2.

SYSTÈME FONDAMENTAL D'ENTOURAGES (фундаментальная система окружений) равномерной структуры: II, 1, 1; — **DE VOISINAGES D'UN POINT** (— — окрестностей точки): I, 1, 3. Нем.: Umgebungssystem eines Punktes. Англ.: base at a point (для систем открытых окрестностей).

SYSTÈME PRINCIPAL DE PÉRIODES (главная система периодов) q-периодической функции: VII, 1, 6.

T

TANGENTE (тангенс) угла: VIII, 2, 2; — числа: VIII, 2, 4.

Tenant (ensemble d'un seul) (F): множество A, для любых двух точек x, y которого существует связное замкнутое множество, содержащее x и y и содержащееся в A.

TERME GÉNÉRAL (общий член) ряда: III, 5, 6.

Topological equivalence of two spaces (топологическая эквивалентность двух пространств) (L): гомеоморфизм двух пространств; — **mapping** (топологическое отображение): взаимно непрерывное отображение (гомеоморфизм); — **sphere** (топологическая сфера) (L): пространство, гомеоморфное евклидовой сфере.

TOPOLOGIE (топология): I, 1, 1; — **DE LA CONVERGENCE COMPACTE** (— компактной сходимости): X, 1, 3 и 3, 4; — **DE LA CONVERGENCE SIMPLE** (— простой сходимости): X, 1, 3 и 3, 4; — **DE LA CONVERGENCE UNIFORME** (— равномерной сходимости): X, 1, 1; — **DE LA CONVERGENCE UNIFORME DANS LES ENSEMBLES D'UN FAMILLE** (— равномерной сходимости на семействе множеств): X, 1, 3.

TOPOLOGIQUE (ANNEAU) (топологическое кольцо): III, 6, 3; — **(CORPS** (— тело): III, 6, 7; — **(ESPACE)** (— пространство): I, 1, 1; — **(GROUPE)** (топологическая группа): III, 1, 1. || Смысл, вкладываемый в слова «топологическое пространство», исторически очень менялся, и тот, который мы им придаем, еще не общепринят; иногда эти слова понимают в значительно более общем смысле, как, например, в (A—H), (L) и (N). В (A—H) и (N) определена структура менее богатая, чем структура топологического пространства, а именно структура «общего топологического пространства» (A—H) или «абстрактного топологического пространства» (N); она определяется заданием *любого* отображения $X \to \overline{X}$ множества $\mathfrak{P}(E)$ в себя (исходя от которого понятие «замкнутого множества» определяют условием $\overline{X} \subset X$, а затем другие основные топологические понятия обычным образом). В (F) топологическим пространством названо множество, наделенное структурой предыдущего типа с аксиомой $X \subset \overline{X}$ (Фреше принимает за основное понятие производного множества, а не замыкания, но его определение равносильно предыдущему). В (W) рассматриваются лишь достижимые пространства (см. **Accessible (espace)**) и именно такие пространства называются топологическими.

TOPOLOGIQUE (STRUCTURE) (топологическая структура): I, 1, 1. Нем.: topologische Zuordnung (A—H) (когда топологическая структура определена заданием отображения $X \to \overline{X}$).

Topologiquement complet (espace) (топологически полное пространство) (K, W): метризуемое топологическое пространство E, в котором существует расстояние, согласующееся с топологией, относительно которого E есть полное метрическое пространство; — **contenu (espace)** (— содержащееся

в пространстве E) (K): пространство, гомеоморфное подпространству пространства E; — **équivalents** (**sous-espaces**) (— эквивалентные подпространства) пространств E, F (K): подпространства, для которых существует гомеоморфизм E на F, преобразующий одно из этих подпространств в другое.

Topologisch äquivalente Räume (топологически эквивалентные пространства) (A—H): гомеоморфные пространства; — **gleichwertigen Metriken** (— равносильные метрики) (A—H): расстояния, определяющие в одном и том же множестве одну и ту же топологию.

Topologische Znordnung (A—H): топологическая структура; — (**schwächste**) (слабейшая — —): *сильнейшая* из топологических структур (данного семейства); — (**stärkste**) (сильнейшая — —): *слабейшая* из топологических структур (данного семейства).

TORE A UNE DIMENSION (одномерный тор): V 1, 2; — **A *n* DIMENSIONS** (n-мерный тор): VII, 1, 4. Англ.: toroidal group (P).

Toroid (тороид) (L): произведение бесконечного семейства топологических пространств, совпадающих с **T**.

Torus (тор) (A—H): двумерный тор.

Total beschränkte Menge: предкомпактное подпространство (метрического пространства); — **imperfekte** Menge (H): множество, не содержащее ни одного непустого совершенного подмножества); — **unzusammenhängende** Menge (H): вполне несвязное множество.

Totalement borné (ensemble) (K): предкомпактное подпространство (метрического пространства).

TOTALEMENT DISCONTINU (ENSEMBLE) (вполне несвязное множество): I, 11, 5. В другой терминологии: ensemble dispersé (рассеянное множество) (польская школа). Нем.: punkthafte Menge (H), total unzusammenhängende Menge (H), zusammenhangslose Menge (A—H). Англ.: totally disconnected set.

Totally bounded space: предкомпактное пространство; — **disconnected set**: вполне несвязное множество.

T_0-Raum (A—H), **T_0-space** (L): пространство, в котором всякая пара точек удовлетворяет аксиоме Колмогорова (см. **Séparation (axiomes de)**).

T_1-Raum (A—H), **T_1-space** (L): достижимое пространство (см. **Accessible (espace)**).

T_2-Raum (A—H), **T_2-space** (L): отделимое пространство.

T_3-Raum (A—H): регулярное пространство.

T_4-Raum (A—H): нормальное пространство.

T_5-Raum (A—H): вполне нормальное пространство (см. **Complètement normal (espace)**).

Trennungsaxiome: аксиомы отделимости (см. **Séparation (axiomes de)**).

TRIADIQUE (DÉVELOPPEMENT) (троичное разложение) вещественного числа: IV, 8, 5.

TRIGONOMÉTRIQUE (FORME) (тригонометрическая форма) комплексного числа: VIII, 2, 2.

Tychonoff space (тихоновское пространство) (L): вполне регулярное пространство.

Type topologique (espaces de même) (пространства одинакового топологического типа) (A—H, K): гомеоморфные пространства.

U

Überdeckung (abgeschlossene, offene) eines Raumes: замкнутое (открытое) покрытие пространства; — (ε-)eines Raumes: покрытие метрического пространства множествами диаметра $< \varepsilon$.

ULTRAFILTRE (ультрафильтр): I, 6, 4.

Umgebung eines Punktes: открытая окрестность точки; — einer Menge: открытая окрестность множества (II, A—H); — (ε-) einer Menge (A—H): множество всех точек метрического пространства, удаленных от рассматриваемого множества на расстояние $< \varepsilon$. || В (A—H) слово «Umgebung» означает сначала любую окрестность точки, а открытая окрестность именуется «absolute Umgebung»; но со стр. 58 слово «Umgebung» применяется только к открытым окрестностям.

Umgebungssystem eines Punktes (A—H): фундаментальная система окрестностей точки; — eines Raumes (A—H): отображение, относящее каждой точке пространства некоторую фундаментальную систему ее окрестностей.

Umkehrbar stetige Abbildung (H): взаимно непрерывное отображение.

Ummetrisierung eines Raumes (переметризация пространства) (A—H): замена одного расстояния другим, определяющим ту же топологию.

UNIFORME (ESPACE) (равномерное пространство): II, 1, 1.

UNIFORMÉMENT BORNÉE (FAMILIE DE FONCTIONS NUMÉRIQUES) (равномерно ограниченное семейство числовых функций): IV, 5, 5; — **CONTINUE (FONCTION)**.(— непрерывная функция): II, 2, 1; нем.: gleichmässig stetige Abbildung; англ.: uniformly continuous function; — **CONVERGENT (FILTRE)** (— сходящийся фильтр); X, 1, 1; — **CONVERGENTE (FAMILLE)** (— сходящееся семейство) по фильтру: X, 1, 2; — **CONVERGENTE (SÉRIE)** (— сходящийся ряд): X, 1, 2; — **CONVERGENTE (SUITE)** (— сходящаяся последовательность): X, 1, 2; — **ÉQUICONTINU (ENSEMBLE)** (— равностепенно непрерывное множество): X, 2, 1; — **MAJORÉE (FAMILLE DE FONCTIONS NUMÉRIQUES)** (— ограниченное сверху семейство числовых функций): IV, 5, 5; — **MINORÉE (FAMILLE DE FONCTIONS NUMÉRIQUES** (— ограниченное снизу семейство числовых функций): IV, 5, 5; — **SOMMABLE (FAMILLE)** (— суммируемое семейство): X, 1, 2.

UNIFORMISABLE (ESPACE TOPOLOGIQUE) (равномеризуемое топологическое пространство): II, 4, 1.

UNITÉ D'ANGLE (единичный угол): VIII, 2, 3.

Untere Entfernung zweier Mengen (H): расстояние между двумя множествами.

Untere Grenze einer Funktion: нижняя грань функции; — einer Folge von Funktionen: нижняя огибающая последовательности функций.

Untere Limes einer Funktion: нижний предел функции по фильтру; — **einer Folge**: нижний предел последовательности.

Unverdichteter Punkt einer Menge (H): точка множества A, не являющаяся точкой конденсации (см. **Condensation (point de)**); — **Teil einer Menge** (H): множество всех точек множества A, не являющихся его точками конденсации (см. **Condensation (point de)**).

Upper boundary of a function: верхняя грань числовой функции.

Upper semi-continuous collection (W): разбиение топологического пространства такое, что определяемое им отношение эквивалентности замкнуто (см. **Fermée (relation d'équivalence)**).

Urysohn's characteristic function of a pair (A, B) of closed sets (L): непрерывная числовая функция со значениями в $[0, 1]$, определенная на всем пространстве, равная 0 на A и 1 на B.

V

VALEUR ABSOLUE (абсолютное значение) на теле: IX, 3, 2; нем.: Bewertung, multiplikative Bewertung; англ.: absolute value; — — вещественного числа: IV, 1, 6; — — комплексного числа: VIII, 1, 1; нем.: absoluter Betrag.

VALEUR APPROCHÉE (приближенное значение) вещественного числа с точностью до ε: IV, 8, 1.

VALUÉ (CORPS) (нормированное тело): IX, 3, 2. Нем.: Bewerteter Körper.

VARIÉTÉ LINÉAIRE COMPLEXE (— RÉELLE) (комплексное (вещественное) линейное многообразие) в C^n: VIII, 4, 1.

VECTEUR DIRECTEUR (направляющий вектор) прямой: VI, 1, 4.

Verdichtungspunkt einer Menge (H): точка конденсации (см. **Condensation (point de)**) множества.

Verketteter Raum (ε-) (A—H): метрическое пространство, каждые две точки которого соединимы ε-цепью; — (0 —) (A — H): метрическое пространство, каждые две точки которого соединимы ε-цепью при всяком $\varepsilon > 0$.

Verkettetes Mengensystem (A—H): множество $\mathfrak{F}$ подмножеств пространства E, для любых двух элементов A, B которого существует конечная последовательность $(A_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ множеств из $\mathfrak{F}$ такая, что $A_0 = A$, $A_n = B$ и $A_i \cap A_{i+1} \neq \varnothing$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$.

Vervollständ g ng eines Raumes (H): пополнение метрического пространства.

VOISINAGE (окрестность) множества: I, 1, 2; — точки: I, 1, 2; — порядка V множества: II, 1, 2. Нем.: Umgebung. Англ.: Neighbo(u)rhood (заметим, что эти слова означают у упоминаемых нами авторов *открытую* окрестность).

VOISINS D'ORDRE V (POINTS) (точки, близкие порядка V): II, 1, 1.

Vollkugel (A—H): замкнутый евклидов шар.

Vollständig normaler Raum: вполне нормальное пространство (см. **Complètement normal (espace)**).

Vollständige Hülle eines Raumes: пополнение метрического пространства.
Vollständiger Raum: полное метрическое пространство.

W

Weaker topology: мажорируемая топология.
Well-chained set (W): множество (в метрическом пространстве), каждые две точки которого при любом $\varepsilon > 0$ соединимы ε-цепью, состоящей из точек множества.
Winkel: угол.
Würfel: куб.
Wurzel (***n*-te**) einer Zahl: корень n-й степени из вещественного числа.

Y

Youngsche Menge (H): метризуемое топологическое пространство E, допускающее расстояние, согласующееся с его топологией, при котором E есть полное метрическое пространство.

Z

Zerlegbarer Raum (H): пространство, являющееся объединением двух отличных от него замкнутых подмножеств.
Zerlegung eines Raumes (A—H): разбиение пространства; — **(normale)** eines Raumes (— нормальное) (A—H): разбиение пространства, факторпространство по которому нормально; — **(reguläre)** eines Raumes (— регулярное) (A—H): разбиение пространства, факторпространство по которому регулярно; — **(stetige)** eines Raumes (— непрерывное) (A—H): разбиение пространства, которому соответствует замкнутое отношение эквивалентности (см. **Fermée (relation d'équivalence)**).
Zerlegungsraum (A—H): факторпространство.
Zerstückelung eines Raumes: разбиение пространства на два открытых множества.
Zusammenhängende Menge: связное множество.
Zusammenhängender Raum: связное пространство.
Zusammenhangslose Menge (A—H): вполне несвязное множество.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

«Р» означает ссылку на «Сводку результатов».

	Гл.	§	n°
$\widetilde{E}$ (E — вполне регулярное пространство) . . .	IX	1	упр. 7
$d(A, B)$, $d(x, A)$, $\delta(A)$ (x — точка, A, B — множества в метрическом пространстве, в котором расстояние между точками x, y обозначается $d(x, y)$) . . .	IX	2	2
	Р	3	7
$\lvert x \rvert$ (абсолютное значение в нормированном теле)	IX	3	2
	Р	10	22
$\lVert x \rVert$ (норма в нормированном пространстве) . . .	IX	3	3
	Р	10	29
$D(X)$	IX	5	упр. 3
$L(C)$ (C — решето)	IX	6	5
$\mathfrak{F}_\alpha$, $\mathfrak{G}_\alpha$	IX	6	упр. 4
$\prod_{n \in \mathbf{N}} x_n$, $\prod_{n} x_n$ (в нормированной алгебре)	IX	Прил.	1
	Р	11	12
$\overset{\infty}{\underset{n \quad h}{\mathrm{P}}} x_n$, $\overset{\infty}{\underset{n=0}{\mathrm{P}}} x_n$ (в нормированной алгебре)	IX	Прил.	3
	Р	11	15
	Р	11	16
$\prod_{n=0}^{\infty} x_n$	IX	Прил.	3
$\mathcal{F}(X; Y)$, $H(x)$ (H — множество в $\mathcal{F}(X; Y)$), $\Phi(x)$ (Φ — фильтр в $\mathcal{F}(X; Y)$), $u \mid A$, $H \mid A$ (A — множество в X, $u \in \mathcal{F}(X; Y)$, $H \subset \mathcal{F}(X; Y)$)	X	1	
	Р	13	1
$W(V)$ (V — окружение для Y) .	X	1	1
$\mathcal{F}_u(X; Y)$	X	1	1
$\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$, $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}$	X	1	2
	Р	13	3
$W(A, V)$ ($A \subset \mathfrak{S}$, V — окружение для Y)	X	1	2
$\mathcal{F}_s(X; Y)$, $\mathcal{F}_c(X; Y)$	X	1	3
$\mathcal{C}(X; Y)$, $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$, $\mathcal{C}_s(X; Y)$, $\mathcal{C}_c(X; Y)$, $\mathcal{C}_u(X; Y)$ . . .	X	1	6
	Р	13	5
$\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$	X	1	6

	Гл.	§	n°
$\tilde{x}$ (x — точка в X)	X	2	1
$\mathscr{B}_{\mathfrak{S}}(X; Y)$, $\mathscr{B}(X; Y)$ (Y — метрическое пространство)	X	3	1
	P	13	4
$\|\|u\|\|$ (u — ограниченное отображение нормированное пространство) . . .	X	3	2
$\mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ (X_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) и Y — нормированные пространства)	X	3	2
$\|\|u\|\|$ (u — полилинейное отображение произведения нормированных пространство) в нормированное пространство) . .	X	3	2
$\mathrm{T}(K, U)$ (K — компактное множество в X, U — открытое множество в Y) . .	X	3	4
$\mathscr{T}_\beta$	X	3	5
$\mathscr{C}^\infty(X; \mathrm{R})$	X	4	упр. 6
βX	X	4	упр. 6
νX	X	4	упр. 17
$\mathring{A}$	P	1	9
$\bar{A}$	P	1	10
$\lim_{\mathfrak{F}} f$, $\lim_{\mathfrak{F}} f(x)$	P	2	16
$\lim_{n\to\infty} x_n$	P	2	18
$\lim_{x\in A} f(x)$ (A — фильтрующееся упорядоченное множество) . .	P	2	19
$\lim_{x\to a,\, x\in A} f(x)$, $\lim_{x\to a} f(x)$	P	2	20
$\omega(x_0; f)$	P	2	20
$\limsup_{\mathfrak{F}} f$, $\liminf_{\mathfrak{F}} f$, $\limsup_{\mathfrak{F}} f(x)$, $\liminf_{\mathfrak{F}} f(x)$ . .	P	2	22
$\limsup_{n\to\infty} x_n$, $\liminf_{n\to\infty} x_n$ . . .	P	2	25
$\limsup_{x\to a,\, x\in A} f(x)$, $\liminf_{x\to a,\, x\in A} f(x)$ . .	P	2	25
$\limsup_{x\to a} f(x)$, $\liminf_{x\to a} f(x)$ . .	P	2	25
$\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ ($\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — фильтры) . . .	P	2	26
$\sum_{\iota\in I} x_\iota$, $\sum_{\iota} x_\iota$, $\sum x_\iota$	P	11	1
$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$	P	11	5
$\sum_{n=m}^{\infty} x_n$	P	11	8
$r(G)$, $d(G)$ (G — замкнутая подгруппа группы R^n)	P	12	1
G^* (G — подгруппа группы R^n) . .	P	12	2
T	P	12	4
a^x, $\log_a x$, $e(x)$	P	12	11
e, π, e^z, $\exp z$ (z — комплексное число) . . .	P	12	12

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

«Р» означает ссылку на «Сводку результатов»

	Гл.	§	n°
Абсолютная сходимость ряда	Р	11	7
Абсолютно суммируемое семейство	IX	3	6
	Р	11	2
— сходящийся ряд	IX	3	6
Абсолютное значение	Р	10	22
— значение р-адическое	IX	3	упр. 5
	Р	10	23
Аддитивная группа вещественных чисел, сравнимых по модулю 1	Р	12	4
— равномерная структура на топологическом теле	Р	10	21
Алгебра нормированная	IX	3	7
	Р	10	31
Александрова теорема	Р	8	16
Аппроксимационная теорема в R^n	Р	12	3
Аппроксимация равномерная	X	4	1
	Р	13	20
Асколи теорема	X	2	5
	Р	13	18
Ассоциированная отделимая равномерная структура	Р	5	6
— подгруппа	Р	12	2
Базис сходящегося фильтра	Р	2	11
— топологии	Р	4	6
— фильтра	Р	2	5
— — Коши	Р	2	11
Базисы эквивалентных фильтров	Р	2	5
Более сильная равномерная структура	Р	4	3
— — топология	Р	4	1
— сильный фильтр	Р	2	3
— слабая равномерная структура	Р	4	8
— — топология	Р	4	1
— слабый фильтр	Р	2	3
Борелевское множество	IX	6	3
— отображение	IX	6	упр. 15
Бэра теорема	IX	5	3
	Р	1	17

	Гл.	§	n°
Бэровское пространство . .	IX	5	3
	P	1	17
Вейерштрасса теорема . .	P	6	18
—Стоуна теорема	X	4	2
	P	13	23
Вещественное пополнение вполне регулярного пространства	X	4	упр. 17
Взаимно непрерывное отображение . .	P	6	6
Внешность множества . . .	P	1	11
Внешняя точка	P	1	11
Внутренность множества . .	P	1	9
Внутренняя точка	P	1	9
Вполне несвязное множество (пространство)	P	9	4
— нормальное пространство	IX	4	упр. 3
— регулярное пространство	IX	1	5
	P	5	5
— регулярный фильтр . . .	IX	1	упр. 8
Всюду плотное множество .	P	1	14
Гомеоморфизм .	P	1	1
Граница множества	P	1	12
Граничная точка	P	1	12
Грань верхняя семейства равномерных структур	P	4	11
— — — топологий	P	4	7
Группа аддитивная вещественных чисел, сравнимых по модулю 1	P	12	4
— операторов, совершенная в точке	X	2	упр. 18
— полная . . .	P	10	13
— топологическая	P	10	1
— — метризуемая	IX	3	1
Группы топологические локально изоморфные	P	10	5
Двойной предел	P	2	26
Диаметр . . .	IX	2	2
	P	3	7
Дини теорема	X	4	1
	P	13	21
Дискретная равномерная структура . .	P	3	1
— топология . .	P	1	1
Дискретное пространство . .	P	1	1
Единичный шар	IX	3	3
Емкость, емкостное множество	IX	6	9
Замкнутое множество . .	P	1	7
— отношение эквивалентности	P	7	17
— покрытие . .	P	1	7
Замкнутый шар	IX	2	2
	P	3	7
Замыкание множества . .	P	1	10
— фильтра . . .	P	2	14
Значение абсолютное . . .	IX	3	2
	P	10	22

	Гл.	§	n°
Значение абсолютное несобственное . .	IX	3	2
	P	10	23
— — *p-адическое*	IX	3	2
	P	10	23
— *предельное функции по фильтру* . . .	P	2	16
Значения абсолютные эквивалентные . .	IX	3	2
	P	10	24
Идеал максимальный вещественный	X	4	упр. 16
— — *гипервещественный* . .	X	4	упр. 16
Изолированная точка	P	1	13
Изометрическое отображение	IX	2	2
Изометрия . . .	IX	2	2
	P	3	7
Изоморфизм локальный топологических групп	P	10	5
— *топологических групп*	P	10	4
Инвариантное расстояние . .	IX	3	1
	P	10	7
Индуцированная равномерная структура .	P	7	3
— *топология* .	P	7	1
Индуцированный фильтр . . .	P	2	8
Колебание функции на множестве, в точке .	IX	2	3
	P	2	20
Коллективно нормальное пространство . .	IX	4	упр. 18
Кольцо топологическое . . .	P	10	16
— — *полное* . .	P	10	19
Коммутативно сходящийся ряд	P	11	7
Компактификация Стоуна — Чеха	IX	1	упр. 7
Компактное множество . .	P	8	1
— *пространство*	P	8	1
Конденсации точка	IX	5	упр. 11
Конечного типа покрытие . .	P	8	20
Коши базис фильтра . . .	P	2	11
— *последовательность*	P	2	18
Куб	IX	1	5
Левая равномерная структура топологической группы . . .	P	10	11
Линделефово пространство . .	IX	4	упр. 23
Линейно достижимая точка	IX	6	упр. 11
Локально изоморфные группы	P	10	5
— *компактное пространство*	P	8	15
— *конечное семейство подмножеств* . .	IX	4	3
	P	5	10
— — — *функций*	P	5	11
— *паракомпактное пространство*	IX	4	упр. 27

	Гл.	§	n°
Локально связное пространство	P	9	7
Локальный изоморфизм . . .	P	10	5
Лузинское пространство . .	IX	6	4
Мажорируемая равномерная структура . .	P	4	8
— *топология* . .	P	4	1
Мажорируемое покрытие . .	P	8	20
Мажорируемый фильтр . . .	P	2	3
Мажорирующая равномерная структура . .	P	4	8
— *топология* . .	P	4	1
Мажорирующее покрытие . .	P	8	20
Мажорирующий фильтр . . .	P	2	3
Малое порядка V множество . .	P	2	11
Метакомпактное пространство	IX	4	упр. 25
Метризуемая равномерная структура . .	IX	2	4
	P	3	8
— *топологическая группа*	IX	3	1
Метризуемое равномерное пространство	IX	2	4
— *топологическое пространство*	IX	2	5
	P	3	9
Метрическое пространство . .	IX	2	1
	P	3	7
Множество борелевское . . .	IX	6	3
Множество вполне несвязное . . .	P	9	4
— *всюду плотное*	P	1	14
— *замкнутое* . .	P	1	7
— *компактное* .	P	8	1
— *малое порядка V*	P	2	11
— *ограниченное*	IX	2	2
	P	3	7
— *открытое* . .	P	1	1
— *относительно компактное* .	P	8	1
— *отображений отделяющее* .	P	13	22
— *плотное относительно другого множества*	P	1	14
— *подмножеств насыщенное* . .	X	1	упр. 5
— *приближаемое*	IX	5	упр. 6
— *равномерно равностепенно непрерывное* .	X	2	1
	P	13	9
— *равностепенно непрерывное* .	X	2	1
	P	13	9
— — — *в точке*	X	2	1
	P	13	9
— *разреженное*	IX	5	1
	P	1	15
— — *относительно подпространства*	IX	5	1
	P	1	15
— *редкое* . . .	IX	5	упр. 1
— *связное* . . .	P	9	1
— *совершенное* .	P	1	13
— *суслинское* . .	IX	6	2
— *тощее* . . .	IX	5	2
	P	1	16
— — *относительно подпространства*	IX	5	2
	P	1	16

	Гл.	§	n°
Множество фильтрующееся . .	P	2	1
— *элементарное*	P	7	5
Монотонный предел	P	2	21
Морфизм сильный	P	10	9
Мультипликативные равномерные структуры топологического тела	P	10	21
Насыщенное семейство отклонений	IX	1	2
Неистощимое пространство	IX	5	упр. 7
Непрерывная функция в точке	P	6	1
— — — — *подмножества относительно множества* . .	P	6	9
— — *на всем пространстве* . .	P	6	3
— — *относительно подмножества*	P	6	9
Непрерывное продолжение . . .	P	6	10
— *разбиение единицы*	P	5	11
— *сечение* . . .	P	7	20
Неравенство треугольника . .	IX	1	1
	P	3	3
Несобственное абсолютное значение	IX	3	2
	P	10	23
Норма	IX	3	3
	P	10	26
Норма согласующаяся со структурой алгебры	IX	3	7
	P	10	31
Нормально отделимые множества	IX	1	упр. 11
— *сходящийся ряд*	X	3	2
Нормальное пространство . .	IX	4	1
	P	5	7
Нормированная алгебра . . .	IX	3	7
	P	10	31
Нормированное пространство	IX	3	3
	P	10	26
— *тело*	IX	3	2
	P	10	22
Нормы эквивалентные . . .	IX	3	3
	P	10	27
Носитель функции	IX	4	3
Обрубок	IX	Прил.	упр. 2
Ограниченное множество в метрическом пространстве . .	P	3	7
Однообразное покрытие пространства . .	IX	4	упр. 16
Окрестность . .	P	1	3
— *симметричная*	P	10	3
Окружение равномерной структуры . .	P	3	1
— *симметричное*	P	3	2
Остаток бесконечного произведения . . .	P	11	16
— *ряда*	P	11	8

	Гл.	§	n°
Отделение точек множества посредством множества функций	X	4	1
Отделимая равномерная структура . .	P	3	5
Отделимое пространство	P	5	1
Отделяющее множество отображений . .	P	13	22
Отклонение . . .	IX	1	1
	P	3	3
Отклонения эквивалентные . .	IX	1	2
Открытое множество . . .	P	1	1
— отношение эквивалентности	P	7	17
— покрытие . .	P	1	1
Открытый шар	IX	2	2
	P	3	7
Относительно компактное множество . .	P	8	1
Отношение эквивалентности замкнутое . .	P	7	17
— — открытое	P	7	17
Отображение борелевское . .	IX	6	упр. 15
— изометрическое	IX	2	2
— ограниченное (в метрическом пространстве)	X	3	1
— порожденное просеиванием	IX	6	5
— приближаемое	IX	5	упр. 24
— совершенное .	P	8	18
Паракомпактное пространство	P	8	20
Перемножаемая последовательность	IX	Прил.	1
	P	11	12
Перемножаемое семейство . .	P	11	11
Пересечение топологий . . .	P	4	5
Период функции	P	12	6
Периодическая и q-кратно периодическая функция . .	P	12	6
Плотное множество	P	1	14
Подпространство равномерного пространства	P	7	3
— топологического пространства	P	7	1
Подчиненное локально конечному покрытию непрерывное разбиение единицы	P	5	11
— семейству подмножеств семейство функций	IX	4	3
Покрытие замкнутое	P	1	7
— конечного типа	P	8	20
— мажорируемое (мажорирующее)	P	8	20
— однообразное	IX	4	упр. 16
— открытое . .	P	1	1
Полином относительно числовых			

	Гл.	§	n°
функций из заданного множества . . .	X	4	2
	P	13	23
Полиномы тригонометрические от т переменных . . .	X	4	4
	P	13	26
Полная топологическая группа	P	10	13
Полное равномерное пространство	P	3	10
— *топологическое кольцо* . .	P	10	19
Полукомпактное пространство	IX	2	упр. 14
Полунепрерывная снизу (сверху) функция . . .	P	6	16
Польское пространство . .	IX	6	1
Пополнение вещественное вполне регулярного пространства	X	4	упр. 17
— *отделимого равномерного пространства*	P	3	11
— — *топологического кольца* .	P	10	19
— *отделимой топологической группы* . . .	P	10	14
Порождаемая равномерной структурой топология . .	P	3	5
— *семейством подмножеств топология* . .	P	4	6
Порождаемый семейством подмножеств фильтр . . .	P	2	4
Порожденное множеством подмножеств тело множеств	IX	6	3
— *просеивающим отображение*	IX	6	5
Последовательность Коши .	P	2	18
— *перемножаемая*	IX	Прил.	1
	P	11	12
— *сходящаяся*	P	2	18
Почти периодическая точка группы гомеоморфизмов . .	X	3	упр. 27
Правая равномерная структура топологической группы . . .	P	10	11
Предел базиса фильтра . . .	P	2	11
— *нижний (верхний) числовой функции по фильтру* . . .	P	2	22
— *последовательности* . . .	P	2	18
— *функции в точке, относительно подмножества*	P	2	20
— — *по фильтру*	P	2	16
— — — *фильтрующемуся множеству* . .	P	2	19
Предельная точка базиса фильтра	P	2	11
— — *множества*	P	1	10

	Гл.	§	n°
Предкомпактное множество . .	P	3	12
— *пространство*	P	3	12
Приближаемое множество	IX	5	упр. 6
— *отображение*	IX	5	упр. 24
Принцип продолжения неравенств . . .	P	6	10
— — *тождеств*	P	6	10
Продолжение по непрерывности	P	6	10
Произведение бесконечное . .	IX	Прил.	3
	P	11	11
— — *сходящееся*	IX	Прил.	3
	P	11	11
	P	11	15
— *перемножаемого семейства* .	P	11	11
— *перемножаемой последовательности* . .	IX	Прил.	1
	P	11	12
— *равномерных пространств*	P	7	11
— — *структур*	P	7	11
— *топологий* . .	P	7	5
— *топологических групп*	P	10	10
— — *пространств*	P	7	5
— *фильтров* . .	P	2	26
Просеивание . .	IX	6	5
— *сильное* . . .	IX	6	5
Просто сходящийся фильтр	X	1	3
	P	13	2
Пространств пересечение . .	P	4	5
— *произведение*	P	7	5
— *сумма* . . .	P	7	16
Пространства-сомножители	P	7	11
	P	7	15

	Гл.	§	n°
Пространство, ассоциированное с решетом . .	IX	6	5
— *бэровское* . .	IX	5	3
	P	1	17
— *вещественно полное* . . .	X	4	упр. 17
— *вполне несвязное*	P	9	4
— — *нормальное*	IX	4	упр. 3
— — *регулярное*	IX	1	5
	P	5	5
— *дискретное*	P	1	1
— *коллективно нормальное* .	IX	4	упр. 18
— *компактное* .	P	8	1
— *линделефово* .	IX	4	упр. 23
— *локально компактное* . .	P	8	15
— — — *счетное в бесконечности*	P	8	19
— — *паракомпактное* . .	IX	4	упр. 27
— — *связное* . .	P	9	7
— *лузинское* . .	IX	6	4
— *метакомпактное*	IX	4	упр. 25
— *метризуемое*	P	3	9
— — *счетного типа*	IX	2	8
	P	1	14
— *метрическое*	IX	2	1
	P	3	7
— *неистощимое*	IX	5	упр. 7
— *нормальное*	IX	3	3
	P	5	7
— *нормированное*	IX	3	3
	P	10	26
— *отделимое* . .	P	5	1
— *паракомпактное*	P	8	20
— *полное* . . .	P	3	10
— *полукомпактное*	IX	2	упр. 14

	Гл.	§	n°
Пространство польское . . .	IX	6	1
— *предкомпактное*	P	3	12
— *равномеризуемое*	P	3	6
— *равномерное*	P	3	5
— — *метризуемое*	IX	2	4
— *раздробленное*	IX	6	4
— *регулярное* . .	P	5	4
— *связное* . . .	P	9	1
— *сильно раздробленное* . . .	IX	6	упр. 1
— *совершенно неистощимое* . .	IX	5	упр. 12
— — *нормальное*	IX	4	упр. 7
— *суслинское* . .	IX	6	2
— *топологическое*	P	1	1
— — *метризуемое*	IX	2	5
— *хаусдорфово* .	P	5	1
Равномеризуемое пространство	P	3	6
Равномерная структура . .	P	3	1
— — *аддитивная топологического тела*	P	10	21
— — *ассоциированная*	P	5	6
— — *дискретная*	P	3	1
— — *индуцированная*	P	7	3
— — *компактной сходимости* . .	X	1	3
	P	13	2
— — *мажорируемая (мажорирующая, более сильная, более слабая)*	P	4	8
Равномерная структура метризуемая .	IX	2	4
	P	3	8
— — *мультипликативная топологического тела*	P	10	21
— — *ограниченной сходимости*	X	1	3
— — *определенная отклонением, семейством отклонений*	IX	1	2
	P	3	4
— — *отделимая*	P	3	5
— — —, *ассоциированная с данной равномерной структурой*	P	5	6
— — *правая (левая) топологической группы*	P	10	11
— — *предкомпактной сходимости* . . .	X	1	3
— — *простой сходимости* .	X	1	3
— — — — *на подмножестве*	X	1	3
	P	13	2
— — *равномерной сходимости*	X	1	1
	X	1	3
	P	13	2
— — — — *на множествах семейства* $\mathfrak{S}$ . .	X	1	2
— — — — — *подмножестве* . .	X	1	3
— — *универсальная*	IX	1	упр. 5

	Гл.	§	n°
Равномерно непрерывная функция . .	P	6	5
— — — *относительно подмножества*	P	6	9
— *суммируемое семейство функций* . . .	X	1	2
	P	13	1
— *сходящийся на всяком множестве из* $\mathfrak{S}$ *фильтр* . . .	P	13	1
— — *ряд* . . .	P	13	9
— — *фильтр* .	X	1	1
	P	13	2
Равномерное подпространство	P	7	3
— *пространство*	P	3	1
— *равностепенно непрерывное множество* . .	X	2	1
Равномерные структуры сравнимые . .	P	4	8
Равностепенно непрерывное в точке множество . . .	X	2	1
— — *множество*	X	2	1
	P	13	9
Радиус шара . .	IX	2	2
	P	3	7
Разбиение непрерывное единицы	P	5	11
— — —, *подчиненное локально конечному покрытию* . .	P	5	11
Раздробленное пространство	IX	6	4
Разложение единицы непрерывное	IX	4	3
Размерность подгруппы в $\mathbf{R}^n$	P	12	1
Разреженное множество . . .	IX	5	1
	P	1	15
Ранг множества в $\mathbf{R}^n$	P	12	1
Расстояние . .	IX	2	1
— *инвариантное на группе* . .	P	10	11
— — *слева (справа)*	IX	3	1
— *между двумя множествами*	IX	2	2
	P	3	7
— — *точкой и множеством*	IX	2	2
	P	3	7
— *согласующееся с равномерной структурой* .	IX	2	4
— — — *топологией*	IX	2	5
Регуляризация функции полунепрерывная снизу (сверху)	P	6	17
Регулярное пространство . .	P	5	4
Редкое множество	IX	5	упр. 1
Решето	IX	6	5
Ряд абсолютно сходящийся . .	IX	3	6
	P	11	7
— *коммутативно сходящийся* . .	P	11	7
— *нормально сходящийся* . . .	P	13	4
— *равномерно сходящийся* .	P	13	1
— *сходящийся*	P	11	5

	Гл.	§	nº
Связная компонента	P	9	4
— — подмножества	P	9	4
— — точки	P	9	4
Связное множество	P	9	1
— пространство	P	9	1
Семейства отклонений эквивалентные	P	3	4
Семейство абсолютно суммируемое	IX	3	6
	P	11	2
— множеств локально конечное	P	5	10
— отклонений насыщенное	IX	1	2
— перемножаемое	P	11	11
— равномерно суммируемое	P	13	1
— суммируемое	P	11	1
— функций локально конечное	P	5	11
— — подчиненное семейству подмножеств	IX	4	3
Сечение непрерывное	P	7	20
— фильтрующегося упорядоченного множества	P	2	6
Сечений фильтр	P	2	6
Сильно раздробленное пространство	IX	6	упр. 1
Сильный морфизм	P	10	9
Симметричная окрестность	P	10	2
Симметричное окружение	P	3	2
Система главная периодов q-периодической функции	P	12	6
— фундаментальная окрестностей	P	1	4
— — окружений	P	3	2
Совершенно неистощимое пространство	IX	5	упр. 12
— нормальное пространство	IX	4	упр. 7
Совершенное множество	P	1	13
— отображение	P	8	18
Согласующаяся с алгебраической структурой норма	IX	3	7
Согласующееся с равномерной структурой расстояние	IX	2	4
— — топологией расстояние	IX	2	5
Согласующиеся топология и равномерная структура	P	3	6
— — — структура группы	P	10	1
— — — — кольца	P	10	16
— — — — тела	P	10	20
Сравнимые равномерные структуры	P	4	8
— топологии	P	4	1
— фильтры	P	2	3
Стоуна — Чеха компактификация	IX	1	упр. 7

	Гл.	§	n°
Структур равномерных произведение . .	P	7	11
Структура равномерная . .	P	3	1
— — *аддитивная топологического тела*	P	10	21
— — *дискретная*	P	3	1
— — *индуцированная*	P	7	3
— — *компактной сходимости* .	X	1	3
	P	13	2
— — *мажорируемая (мажорирующая, более сильная, более слабая)* . . .	P	4	8
— — *метризуемая*	IX	2	4
	P	3	8
— — *мультипликативная топологического тела*	P.	10	21
— — *ограниченной сходимости*	X	1	3
— — *определенная отклонением, семейством отклонений*	IX	1	2
— — *отделимая*	P	3	5
— — — *ассоциированная с данной равномерной структурой*	P	5	6
— — *правая (левая) топологической группы*	P	10	11
Структура равномерная предкомпактной сходимости . .	X	1	3
— — *простой сходимости*	X	1	3
	P	13	2
— — — — *на подмножестве*	X	1	3
	P	13	2
— — *равномерной сходимости*	X	1	1
	X	1	3
	P	13	2
— — — — *на подмножествах семейства* $\mathfrak{S}$ . . .	X	1	2
— — — — — *подмножестве*	X	1	3
— — *универсальная*	IX	1	упр. 5
— *топологическая*	P	1	1
Структуры равномерные сравнимые . . .	P	4	8
Сумма пространств . .	P	7	16
— *ряда*	P	11	5
— *суммируемого семейства* . .	P	11	1
— *топологий* . .	P	7	16
Суммируемое семейство . . .	P	11	1
Суслинское множество, пространство .	IX	6	2
Сфера	IX	2	2
	P	3	7
Сходимости компактной равномерная структура	P	13	2

	Гл.	§	п°
Сходимости компактной топология	P	13	2
— предкомпактной равномерная структура	X	1	3
— простой равномерная структура	P	13	2
— — топология	P	13	2
— равномерной на множествах семейства $\mathfrak{S}$ равномерная структура	P	13	1
— — равномерная структура	P	13	2
— — топология	P	13	1
Сходимость компактная	X	1	3
	X	3	4
— ограниченная	X	1	3
— предкомпактная	X	1	3
— простая	X	1	3
	X	3	4
— равномерная	X	1	1
— — на множествах семейства $\mathfrak{S}$	X	1	2
Сходящаяся последовательность	P	2	18
Сходящееся бесконечное произведение	P	11	15
Сходящийся базис фильтра	P	2	11
— ряд	P	11	15
Счетного типа метризуемое пространство	P	1	14
Счетное в бесконечности локально компактное пространство	P	8	19
Тело	IX	6	3
— множеств, порожденное множеством подмножеств	IX	6	3
— нормированное	P	10	20
— топологическое	P	10	20
Теорема Александрова	P	8	6
— Асколи	X	2	5
	P	13	6
— Бэра	IX	5	3
	P	1	17
— Вейерштрасса	P	6	18
— —Стоуна	X	4	2
	P	13	23
— Дини	X	4	1
	P	13	24
— о двойном пределе	P	2	26
— — монотонном пределе	P	2	24
— об аппроксимации в $\mathbf{R}^n$	P	12	3
— Стоуна	X	4	1
— Тихонова	P	7	9
— Урысона	IX	4	1
	IX	4	2
	P	5	7
Тип счетный метризуемого пространства	IX	2	8
Тихонова теорема	P	7	9
Топологии сравнимые	P	4	1
Топологическая группа	P	10	1
— структура	P	1	1

	Гл.	§	n°
Топологическое кольцо . . .	P	10	16
— *пространство*	P	1	1
— *тело*	P	10	20
Топология . . .	P	1	1
— *дискретная* .	P	1	1
— *индуцированная*	P	7	1
— *компактной сходимости*	X	1	3
	X	3	4
	P	13	2
	P	13	7
— *мажорируемая (мажорирующая, более сильная, менее сильная)* . .	P	4	1
— *порождаемая множеством подмножеств*	P	4	6
— — *равномерной структурой*	P	3	5
— *простой сходимости* . . .	X	1	3
	X	3	4
	P	13	2
— — — *на подмножестве* . .	X	2	3
— *равномерной сходимости* .	X	1	1
	P	13	2
— — — *на множествах семейства* $\mathfrak{S}$ . . .	P	13	1
— — — — *подмножестве* . .	X	2	3
— $\mathfrak{S}$-*сходимости*	X	1	2
Тор одномерный	P	12	4
Точечно конечное семейство множеств	IX	4	3
Точка	P	1	1
— *внешняя* . . .	P	1	11
— *внутренняя* .	P	1	9
— *граничная* . .	P	1	12
— *изолированная*	P	1	13
— *конденсации*	IX	5	упр. 11
— *линейно достижимая* . .	IX	6	упр. 11
— *почти периодическая* . . .	X	3	упр. 27
— *прикосновения базиса фильтра*	P	2	11
— — *множества*	P	1	10
— *равномерной сходимости*	X	1	упр. 9
Тощее множество	P	1	16
Ультраметрическое пространство	IX	2	упр. 4
Ультрафильтр	P	2	7
Универсальная равномерная структура . .	IX	1	упр. 5
Урысона теорема	IX	4	1
	IX	4	2
	P	5	7
Факторпространство топологическое	P	7	17
Фактортопология	P	7	17
Фильтр	P	2	1
— *индуцированный*	P	2	8
— *мажорируемый (минорируемый, более слабый, более сильный)*	P	2	3
— *порождаемый множеством подмножеств*	P	2	4
— *сечений фильтрующегося упорядоченного множества* . .	P	2	6

	Гл.	§	п°
Фильтр сходящийся просто	P	13	2
— — *равномерно*	P	13	2
— — — *на каждом множестве семейства* $\mathfrak{S}$	P	13	1
— *Фреше*	P	2	2
— *элементарный*	P	2	10
Фильтров произведение . .	P	2	26
Фильтрующееся множество . .	P	2	1
Фильтры сравнимые	P	2	3
Фреше фильтр	P	2	2
Функция, аппроксимируемая равномерно функциями заданного множества	P	13	20
— *взаимно непрерывная* . .	P	6	6
— *непрерывная*	P	6	3
— — *в точке* . .	P	6	1
— — — — *подмножества относительно множества* . .	P	6	9
— — *относительно подмножества*	P	6	9
— *q-периодическая*	P	12	6
— *периодическая*	P	12	6
— *полунепрерывная снизу (сверху)* . . .	P	6	16
Функция, полунепрерывная снизу (сверху) в точке	P	6	16
— *почти периодическая* . . .	X	3	упр. 28
— *равномерно непрерывная* . .	P	6	5
— — — *относительно подмножества* . .	P	6	9
Хаусдорфово пространства . .	P	5	1
Центр шара . .	IX	2	2
	P	3	7
Цепь (*s*-, *V*-) . .	P	9	6
Шар единичный	IX	3	3
— *замкнутый, открытый* . .	IX	2	2
	P	3	7
Эквивалентные абсолютные значения . . .	IX	3	2
	P	10	24
— *базисы фильтров*	P	2	5
— *нормы*	IX	3	3
	P	10	27
— *отклонения*	IX	1	2
— *семейства отклонений* . . .	IX	1	2
	P	3	4
Элементарное множество . .	P	7	5
Элементарный фильтр . . .	P	2	10